

Департамент образования и науки Кемеровской области
Государственное учреждение
«Областной центр мониторинга качества образования»

**ЕДИНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭКЗАМЕН
2014**

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК АНАЛИТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Кемерово 2014

Авторы-составители:

В.В. Рагулин, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВПО «Кемеровский государственный университет», ведущий эксперт и председатель предметной комиссии по математике государственной экзаменационной комиссии Кемеровской области.

И.Л. Трель, старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВПО «Кемеровский государственный университет», старший эксперт предметной комиссии по математике государственной экзаменационной комиссии Кемеровской области.

Сборник аналитических материалов представляет собой описание материалов и краткий анализ итогов единого государственного экзамена по математике 2014 года в Кемеровской области, основанный на статистических данных обработки результатов. Он адресован работникам сферы образования, и в первую очередь, учителям математики, школьникам и их родителям.

Единый государственный экзамен: Математика: сборник аналитических материалов. – Кемерово: ГУ ОЦМКО, 2014. – 91 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Краткая характеристика целей и содержания КИМ ЕГЭ 2014 года	4
2. Основные результаты экзамена 2014 года по математике	9
3. Детализация результатов ЕГЭ и качественная картина подготовленности выпускников по математике в 2014 году	20
4. Решение наиболее сложных заданий из вариантов 2014 года	44
5. Общие выводы и некоторые рекомендации	87

1. Краткая характеристика целей и содержания КИМ ЕГЭ 2014 года

ЕГЭ по математике является одним из двух обязательных экзаменов, который сдают все выпускники общеобразовательных организаций. Он призван оценить уровень сформированности у выпускников математических компетенций, предусмотренных требованиями Федерального компонента государственных образовательных стандартов основного общего и среднего общего образования по математике (от 2004 г.).

Контрольные измерительные материалы (далее КИМ) единого государственного экзамена по математике в 2014 году соответствуют целям ЕГЭ:

- подтверждение наличия у выпускника базовых математических компетенций (в случае достижения минимального количества баллов ЕГЭ - порогового балла);
- достаточно объективного ранжирования выпускников при поступлении в образовательные организации среднего или высшего профессионального образования.

Исходным источником информации о содержании и объеме материала, структуре и системе оценивания экзаменационной работы являются следующие документы:

- кодификатор элементов содержания по математике (КЭС) для составления контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2014 г.;
- кодификатор требований к уровню подготовки выпускников по математике (КТ) для составления контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2014 г.;
- спецификация контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2014 г. по математике;
- демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов для ЕГЭ 2014 года по математике.

Общий план КИМ по математике 2014 года

В КИМ-ах ЕГЭ по математике в 2014 году соблюдена преемственность с КИМ-ами 2013 года в тематике, примерном содержании и уровне сложности заданий. При этом имеются определенные качественные и количественные отличия, отраженные в спецификации и демоверсии:

- изменён порядок заданий в экзаменационной работе (задание по теории вероятностей перенесено на позицию 6, задания по геометрии перенесены на позиции 5, 8, 10, 13);
- добавлено одно задание с кратким ответом базового уровня сложности, предназначенное для проверки навыков практического применения математики;
- без изменения сложности расширена тематика заданий C1, C3, C5 и C6;
- без изменения сложности расширена тематика задания C4 – в этом задании будет присутствовать пункт на доказательство геометрического факта. Таким образом, количество заданий в части В увеличилось на один, их стало 15 (B1–B15). Количество заданий второй части осталось прежним – 6 заданий (C1–C6), причем без изменения уровня сложности расширена тематика всех заданий.

Правильный ответ каждого из заданий B1-B15 оценивался 1 баллом, при этом проверка производилась компьютерной программой. Максимальные оценки за решения заданий части C варьировались от 2 до 4 баллов: полное правильное решение каждого из заданий C1 и C2 оценивалось 2 баллами, каждого из заданий C3 и C4 – 3 баллами, каждого из заданий C5 и C6 – 4 баллами. Таким образом, максимально возможный балл за всю работу стал равным 33.

Соответственно изменилась шкала перевода первичных баллов в тестовые (таблица 1).

Таблица 1

**Шкала перевода первичных баллов в тестовые по математике
в 2011 – 2014 гг.**

Первичный балл	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Тестовый балл 2011г.	6	12	18	24	30	34	38	41	45	49	52	56	60	63	66	68	70
Тестовый балл 2012г, 2013 г.	5	10	15	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	63	66	68
Тестовый балл 2014г.	5	10	15	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	63	66	68

Первичный балл	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
Тестовый балл 2011г.	73	75	77	80	82	84	87	89	91	94	96	98	100			
Тестовый балл 2012г, 2013 г.	70	72	74	77	79	81	83	85	87	90	92	94	96	98	100	
Тестовый балл 2014г.	70	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100

В таблице 2 приведена структура экзаменационной работы.

Таблица 2

Структура варианта контрольных измерительных материалов 2014 г.

	Часть 1	Часть 2
	10	11
Тип заданий и форма ответа	В1-В10 с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби	В11-В15 с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби С1-С6 с развернутым ответом (полная запись решения с обоснованием выполненных действий)
Назначение	Проверка освоения базовых умений и практических навыков применения математических знаний в повседневных ситуациях	Проверка освоения математики на профильном уровне, необходимом для применения математики в профессиональной деятельности и на творческом уровне

Уровень сложности	Базовый	Повышенный и высокий
Проверяемый учебный материал курсов математики	1. Математика 5-6-х классов 2. Алгебра 7-9-х классов 3. Алгебра и начала анализа 10-11-х классов 4. Теория вероятностей и статистика 7-9-х классов 5. Геометрия 7-11-х классов	1. Алгебра 7-9-х классов 2. Алгебра и начала анализа 10-11-х классов 3. Геометрия 7-11-х классов

В таблице 3 представлено распределение заданий по уровню сложности.

Таблица 3

Распределение заданий по уровню сложности

Уровень сложности заданий	Число заданий	Максимальный первичный балл	Процент максимального первичного балла за задания данного уровня сложности от максимального первичного балла за всю работу, равного 33
Базовый	10	10	30,3%
Повышенный	9	15	45,5%
Высокий	2	8	24,2%
Итого	21	33	100%

В таблице 4 показано распределение заданий экзаменационной работы по содержательным блокам.

Таблица 4

Распределение заданий по содержательным блокам

Содержательные блоки по кодификатору КЭС	Число заданий	Максимальный первичный балл	Процент максимального первичного балла за задания данного блока содержания от максимального первичного балла за всю работу, равного 33
Алгебра	5	8	24,2%
Уравнения и неравенства	5	11	33,3%
Функции	2	2	6,1%
Начала математического анализа	2	2	6,1%

Геометрия	6	9	27,3%
Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей	1	1	3,0%
Итого	21	33	100%

Содержание и структура экзаменационной работы дают возможность достаточно полно проверить комплекс умений по предмету:

- уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни;
- уметь выполнять вычисления и преобразования;
- уметь решать уравнения и неравенства;
- уметь выполнять действия с функциями;
- уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами;
- уметь строить и исследовать математические модели.

На основании статистических данных по результатам экзамена текущего года и результатов прошлого года, а также согласно заключениям специалистов в области педагогических измерений было принято решение о снижении минимального количества баллов по математике: с 24 до 20 баллов. Пороговый балл ЕГЭ, подтверждающий освоение выпускниками основной общеобразовательной программы среднего общего образования по математике 2006 - 2014 годы представлен в таблице 5.

Таблица 5

Пороговый балл ЕГЭ, подтверждающий освоение выпускниками основной общеобразовательной программы среднего общего образования по математике 2006 - 2014 годы

2006 год	2007 год	2008 год	2009 год	2010 год	2011 год	2012 год	2013 год	2014 год
6	7	6	4	3	4	5	5	4

На выполнение экзаменационной работы отводилось (как и в прошлом году) 3 часа 55 минут (235 минут), что на 5 минут меньше по сравнению с 2012 г. и более ранними годами.

2. Основные результаты экзамена 2014 года по математике

В таблице 6 представлено количество участников ЕГЭ по математике в Кемеровской области с 2011 года по 2014 год.

Таблица 6

Количество участников ЕГЭ по математике в Кемеровской области

2011 год	2012 год	2013 год	2014 год
10327	14174	12796	11326

В таблице 7 приведены результаты ЕГЭ по математике за последние несколько лет.

Таблица 7

Средние баллы ЕГЭ по математике (по годам)

2011 год		2012 год		2013 год		2014 год	
Россия	Кем. обл.	Россия	Кем. обл.	Россия	Кем. обл.	Россия	Кем. обл.
44,6	43,1	48,2	45	48,7	48,9	44,1	48,2

Средние баллы по Кемеровской области последние два года выше российских. По сравнению с 2013 годом средний балл в области практически не изменился.

В таблице 8 показано количество «стобалльников» по математике в Кемеровской области.

Таблица 8

Количество «стобалльников» в Кемеровской области

2011 год	2012 год	2013 год	2014 год
2	0	16	2

В прошлом году было много выпускников, получивших максимальные баллы: 536 и 16 соответственно. В этом году, ввиду принятых мер по увеличению «прозрачности» экзамена, число «стобалльников» значительно уменьшилось (по России – всего 64 человека).

Анализируя графические представления распределений количества участников, набравших соответствующие баллы за последние четыре года (рис. 1 - 4), обнаружим, что в 2011 году результаты имели «более правильное» нормальное распределение, в 2014-2012 годах получились очень схожие «ущербные» распределения.

Рис. 1

2014 г.

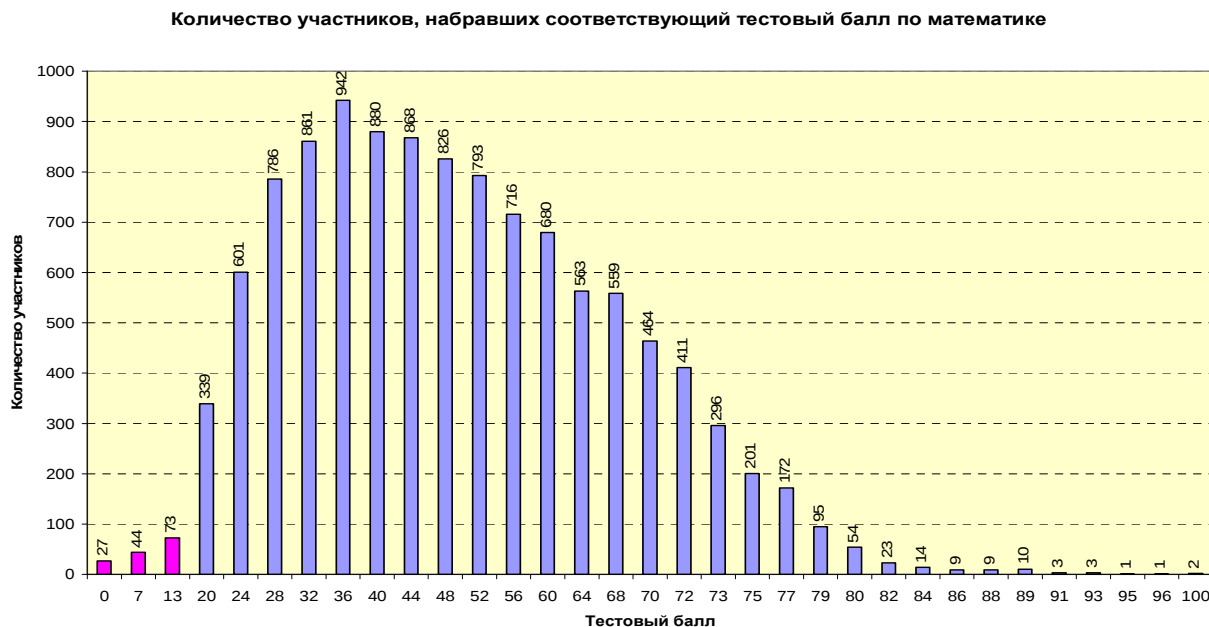
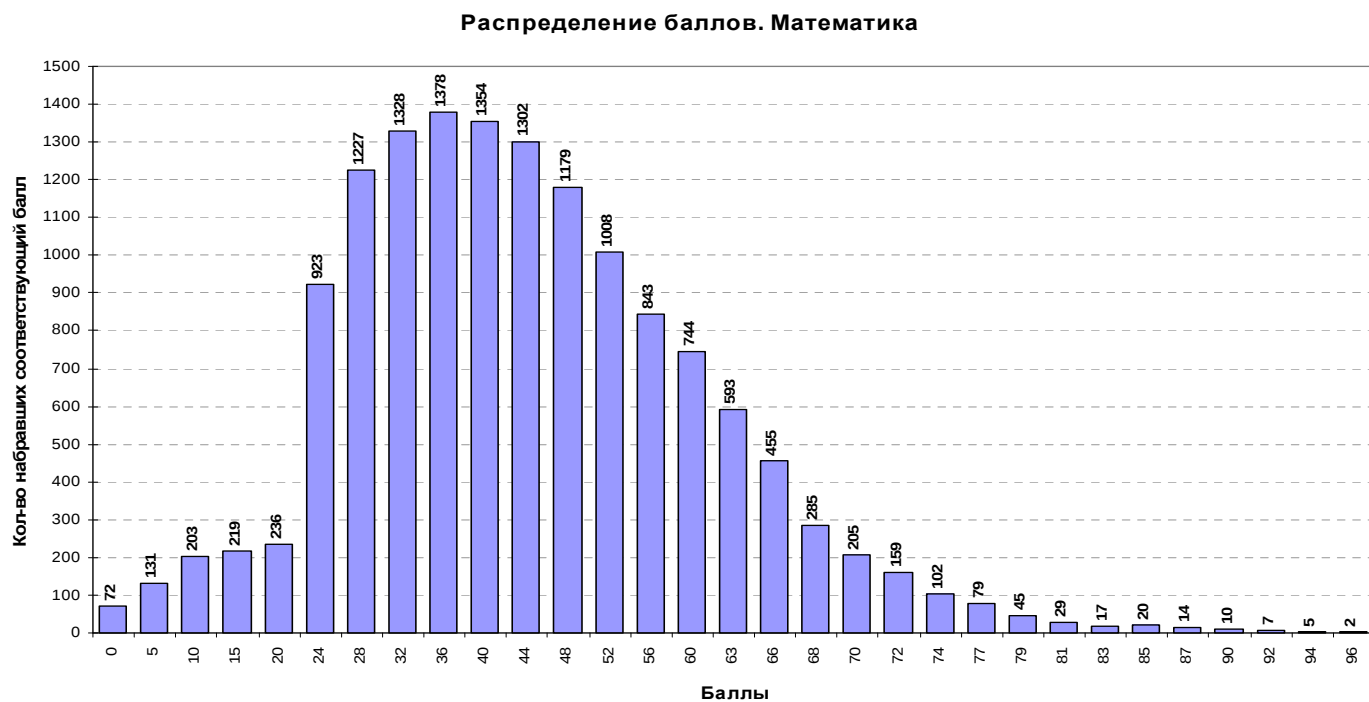


Рис. 2

2013 г.

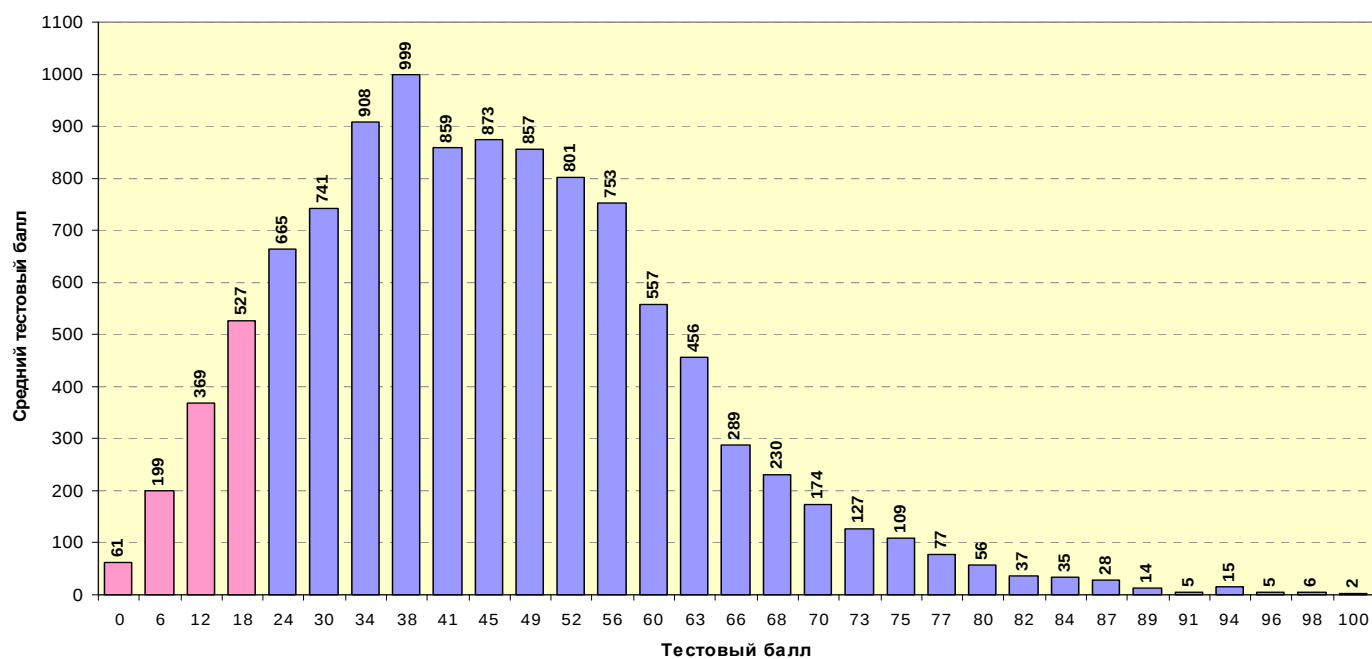


2012 г.



2011 г.

**Количество участников, набравших соответствующий тестовый балл
Математика**



Для определения проблемных мест в подготовке выпускников к ЕГЭ особенно полезен анализ результатов по заданиям и содержательным блокам, представленный в таблице 9.

Таблица 9

**Средние результаты выполнения заданий части В
по Кемеровской области**

Задание	Коды умений	Коды элементов содержания	Проверяемые умения (навыки)	Баллы
B1	6.1	2.1.12	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	86,1
B2	6.1	1.1.1, 1.1.3, 2.1.12	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	77,7
B3	3.1, 6.2	3.1–3.3, 6.2.1	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	93,8
B4	6.1-6.3	1.4.1, 2.1.12, 6.2.1	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	95,08
B5	4.1, 1.2, 1.3	1.1, 1.2, 1.4, 5.1.1, 5.5.1–5.5.5	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	70,7
B6	5.4	6.3	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	60,2
B7	2.1	2.1	Уметь решать уравнения и неравенства	89,1
B8	4.1, 5.2	5.1.1–5.1.4, 5.5.1–5.5.5	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	58,6
B9	3.1–3.3	4.1-4.3	Уметь выполнять действия с функциями	54,2
B10	4.2	5.2–5.5	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	40,1
B11	1.1-1.3	1.1-1.4	Уметь выполнять вычисления и преобразования	49,6
B12	6.2,6.3	2.1,2.2	Уметь использовать знания и умения в практической деятельности	43,9
B13	4.2	5.2-5.5	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	44,6
B14	5.1	2.1,2.2	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	43,3
B15	6.2,6.3	2.1,2.2	Уметь выполнять действия с функциями	36,7

Эти же табличные данные воспринимаются более информативно и полно в графическом виде (см. рис. 5 – 8).

Рис. 5

2014 г.

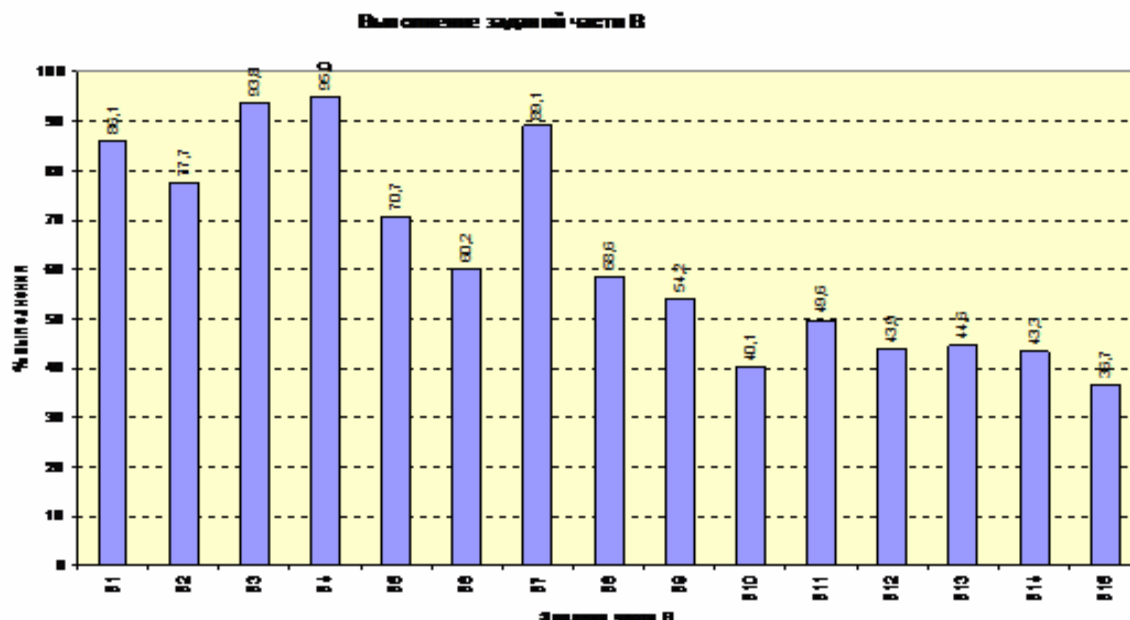
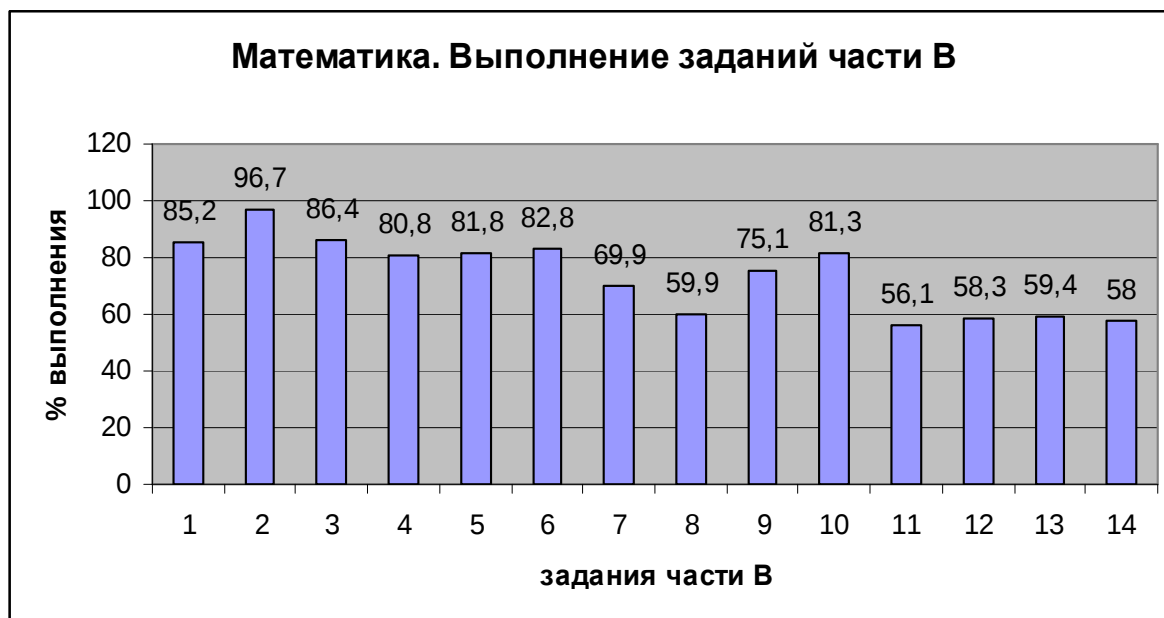


Рис. 6

2013 г.



2012 г.

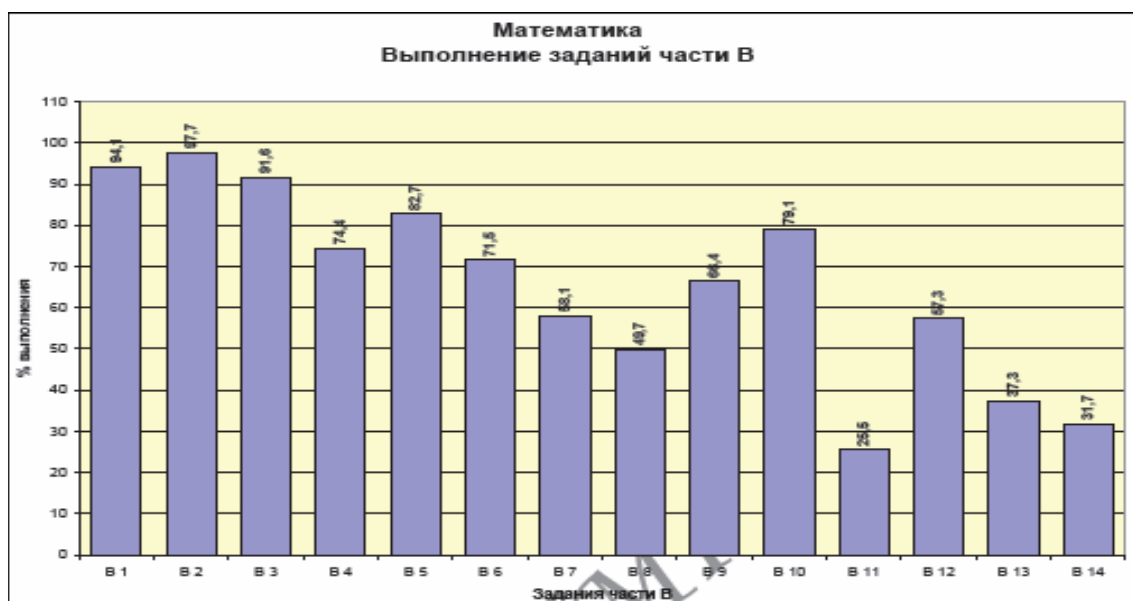
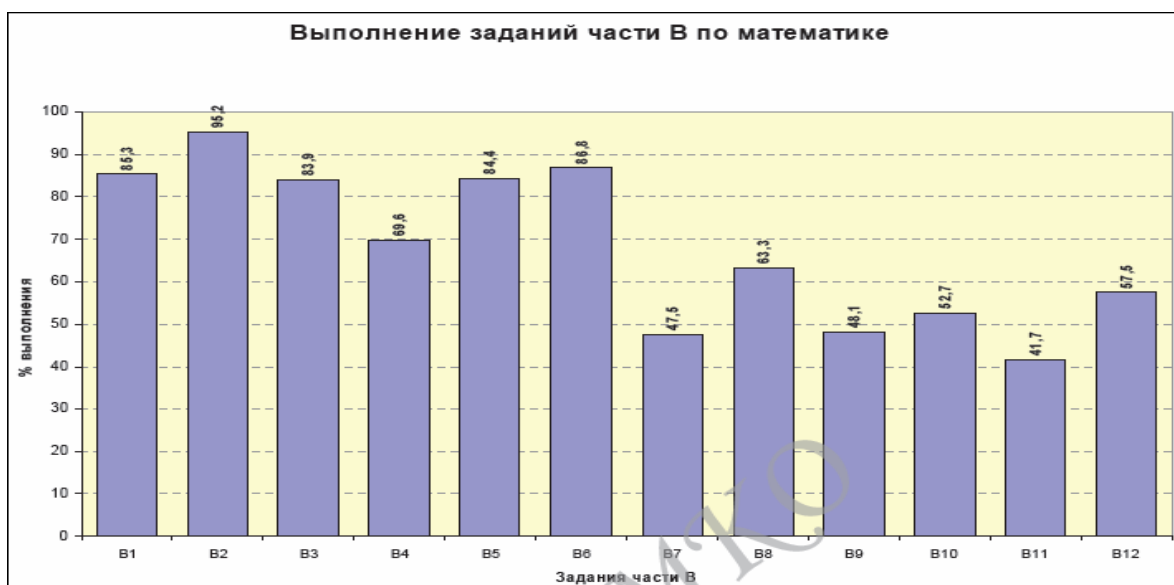


Рис. 8

2011 г.



В таблице 10 приведены результаты выполнения заданий части С в 2014 году.

Таблица 10

**Средние результаты выполнения заданий части С
по Кемеровской области**

Задание	Проверяемые умения (навыки)	Баллы
С1	Уметь решать уравнения и неравенства	28,9
С2	Уметь выполнять действия с геометрическими	1,3

	фигурами, координатами и векторами	
C3	Уметь решать уравнения и неравенства	19,3
C4	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	1,5
C5	Уметь решать уравнения и неравенства	4,1
C6	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	6,3

Рассмотрим результаты выполнения заданий части С по Кемеровской области с 2014 по 2011годы в графическом виде (см. рис. 9 – 12).

Рис. 9

2014 г.

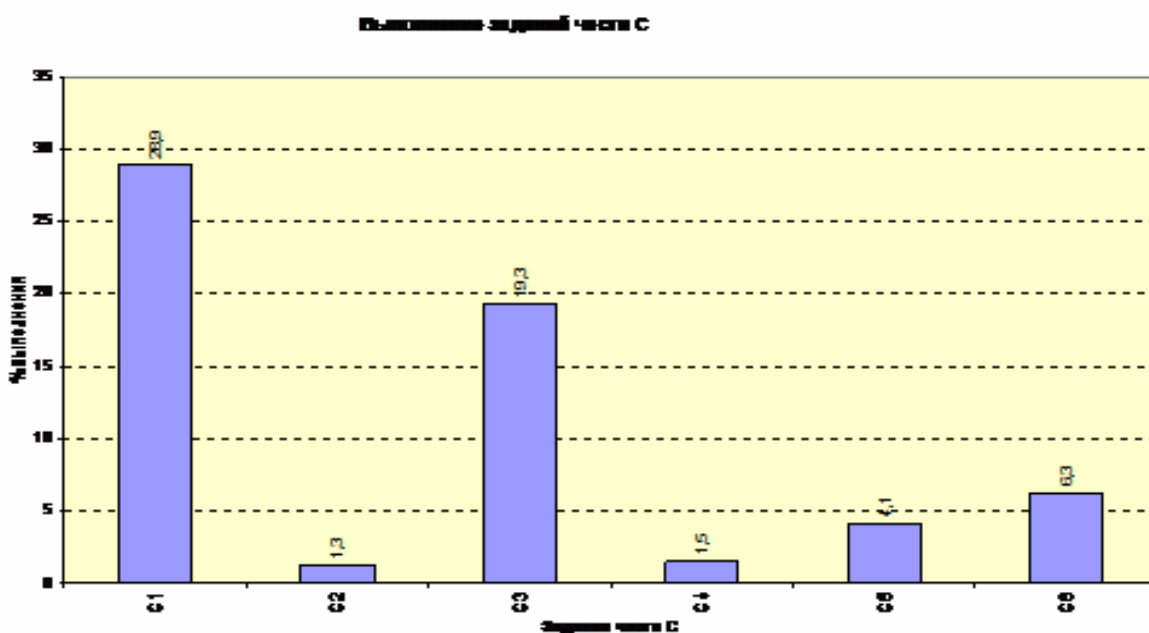
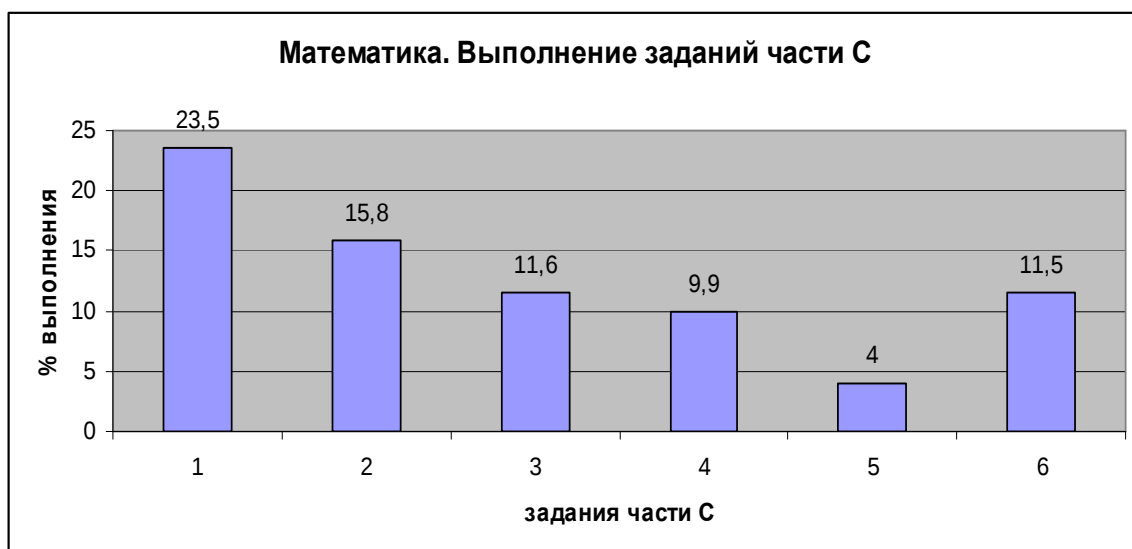


Рис. 10

2013 г.



2012 г.

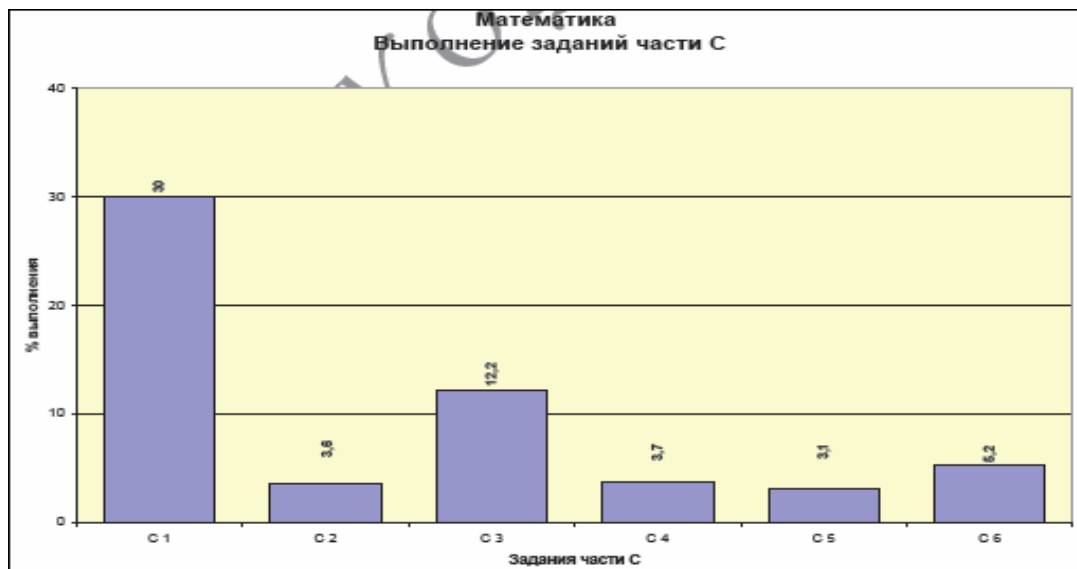
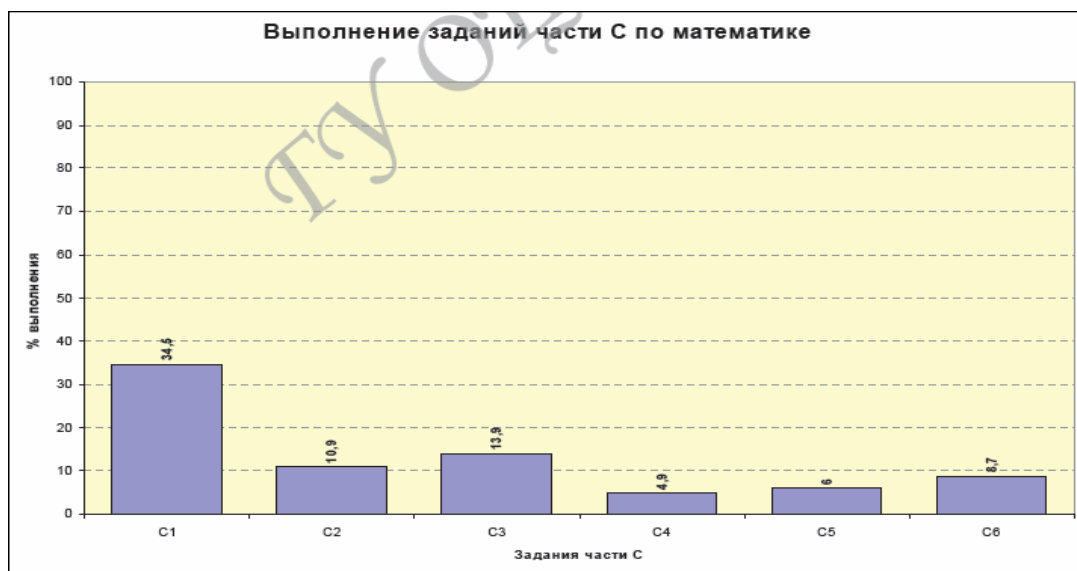


Рис. 12

2011 г.



Сравнивая результаты ЕГЭ по отдельным заданиям части В можно отметить наибольшее отставание наших выпускников в разделах геометрии, математического анализа и в практико-ориентированных задачах. Из части С наибольшую трудность представили задания по геометрии. Ниже мы проведем более детальный анализ результатов и характерных ошибок при решении заданий части С.

Самые высокие средние баллы по математике в 2014 году в г. Полысаево – 55,8, г. Осинники – 52,7 (эти города и в прошлом году входили в тройку городов области с самыми высокими средними баллами).

Самые низкие показатели в Чебулинском районе – 40,8, Яшкинском – 41,8 и Ижморском – 42,3 (напомним, что средний балл по Кемеровской области - 48,2). Конечно, на результаты в территориях влияет структура образовательных организаций, например, где-то больше вечерних школ, профессиональных образовательных организаций, которые имеют традиционно самые низкие показатели по ЕГЭ.

В этом году в г. Осинники, Крапивинском и Яйском районах 100% выпускников прошли минимальный порог. Средний балл выпускников сельских районов почти не отличается от среднего балла городов области. Но выпускники, которые получили 90 и более баллов, обучались в крупных городах области: Кемерово, Междуреченск, Новокузнецк и Прокопьевск, причем, «стобалльники» – выпускники лицеев городов Прокопьевск и Новокузнецк.

Результаты ЕГЭ по Кемеровской области в основной период государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования представлены в таблице 11.

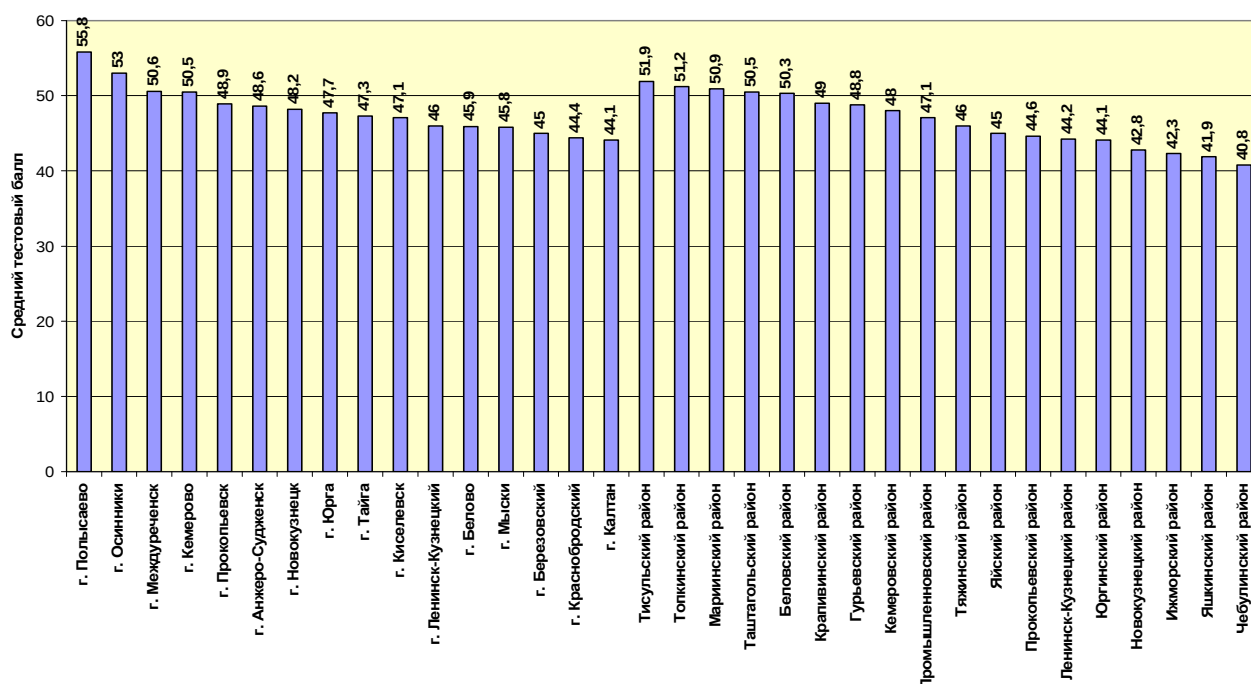
Таблица 11

Количество участников ЕГЭ, набравших соответствующий тестовый балл по математике в 2014 году

Средний балл		48,5
Количество участников		11153
Количество участников, набравших соответствующий балл (%)	0 – мин	115 (1%)
	мин – 49	5969 (53,5%)
	50 – 59	1504 (13,5%)
	60 – 69	1800 (16,1%)
	70 – 79	1638 (14,7%)
	80 – 89	117 (1%)
	90 – 99	8 (0,1%)
	100	2

Приведем диаграмму распределения среднего балла участников ЕГЭ по территориям области (итоги основного периода) (рис. 13).

**Распределение среднего тестового балла по городам, сельским районам
Математика**



Результаты ЕГЭ по математике в разрезе территорий представлены в таблице 12.

Таблица 12

**Результаты ЕГЭ по математике в разрезе территорий
Кемеровской области**

Территория	Кол-во	0-min		min-99		100		Средний балл
		Кол-во	%	Кол-во	%	Кол-во	%	
г. Анжеро-Судженск	313	7	2,2	306	97,8			48,6
г. Белово	616	1	0,2	615	99,8			45,9
г. Березовский	195	9	4,6	186	95,4			45
г. Калтан	114	1	0,9	113	99,1			44,1
г. Кемерово	2423	13	0,5	2410	99,5			50,5
г. Киселевск	407	2	0,5	405	99,5			47,1
г. Краснобродский	73	1	1,4	72	98,6			44,4
г. Ленинск-Кузнецкий	506	13	2,6	493	97,4			46

г. Междуреченск	525	7	1,3	518	98,7			50,6
г. Мыски	192	2	1	190	99			45,8
г. Новокузнецк	2412	18	0,7	2393	99,2	1	0,1	48,2
г. Осинники	216			216	100			53
г. Полысаево	97			97	100			55,8
г. Прокопьевск	746	23	3,1	722	96,8	1	0,1	48,9
г. Тайга	124			124	100			47,3
г. Юрга	343	8	2,3	335	97,7			47,7
Беловский район	82			82	100			50,3
Гурьевский район	158	2	1,3	156	98,7			48,8
Ижморский район	31			31	100			42,3
Кемеровский район	145			145	100			48
Красноярский район	63			63	100			49
Ленинск-Кузнецкий район	35			35	100			44,2
Мариинский район	183	3	1,6	180	98,4			50,9
Новокузнецкий район	116			116	100			42,8
Прокопьевский район	73	1	1,4	72	98,6			44,6
Промышленновский район	270	1	0,4	269	99,6			47,1
Таштагольский район	159	2	1,3	157	98,7			50,5
Тисульский район	61			61	100			51,9
Топкинский район	124			124	100			51,2
Тяжинский район	108			108	100			46
Чебулинский район	41	1	2,4	40	97,6			40,8
Юргинский район	42			42	100			44,1
Яйский район	66			66	100			45
Яшкинский район	94			94	100			41,9

3. Детализация результатов ЕГЭ и качественная картина подготовленности выпускников по математике в 2014 году

В КИМах ЕГЭ по математике 2014 года соблюдена преемственность с КИМами 2013 года в тематике, примерном содержании и уровне сложности заданий. При этом имеются определенные качественные и количественные отличия, отраженные в спецификации и демоверсии:

- изменён порядок заданий в экзаменационной работе (задание по теории вероятностей перенесено на позицию 6, задания по геометрии перенесены на позиции 5, 8, 10, 13);
- добавлено одно задание с кратким ответом базового уровня сложности, предназначенное для проверки навыков практического применения математики;
- без изменения сложности расширена тематика задания С4 – в этом задании стал присутствовать пункт на доказательство геометрического факта.

Таким образом, в 2014 году экзаменационная работа по математике стала содержать 21 задание: 15 заданий (часть В), где нужно было записать ответ в специальный бланк и 6 заданий (часть С), для которых необходимо представить полное решение. Отчасти эти изменения призваны улучшить соответствие результатов текущего и предыдущего года.

Далее остановимся на анализе отдельных заданий из реальных вариантов ЕГЭ 2014 и предыдущих лет, причем из-за перегруппировки заданий номера задач могут не совпадать (сравниваются задания одной тематики).

ЧАСТЬ В

В1. (2014) Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 450 рублей и стоимость одного журнала 24 рубля. За полгода Аня купила 25

номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если подписалась на журнал?

В2. (2014). Больному прописано лекарство, которое нужно принимать по 0,5 г 2 раза в день в течение 7 дней. В одной упаковке 10 таблеток по 0,25г. Какого наибольшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

В1. (2013) Один киловатт-час электроэнергии стоит 1 рубль 40 копеек. Счетчик электроэнергии 1 июня показывал 23818 киловатт-часов, а 1 июля показывал 23992 киловатт-часа. Какую сумму нужно заплатить за электроэнергию за июнь? Ответ дайте в рублях.

В1. (2012) В летнем лагере 236 детей и 28 воспитателей. В автобус помещается не более 49 пассажиров. Какое наименьшее количество автобусов понадобится, чтобы за один раз перевезти всех из лагеря в город?

В1. (2011) Шоколадка стоит 15 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за три шоколадки, покупатель получает 4 (одну в подарок). Сколько шоколадок можно получить на 110 рублей в воскресенье?

Тип задания:

Задание на применение приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни.

Характеристика задания:

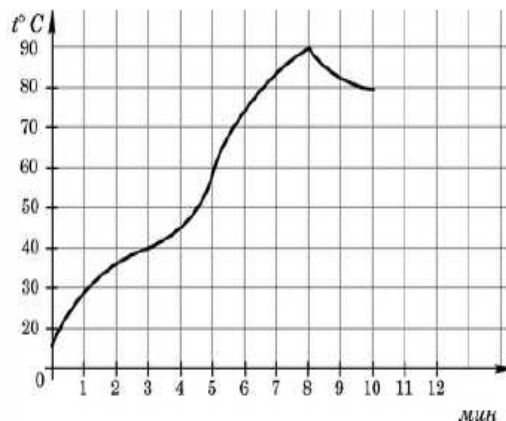
Задание на вычисления в модели реальной жизненной ситуации.

Процент правильных ответов среди выпускников Кемеровской области: в 2014 году – 86,1% для В1 и 77,7% для В2, в 2013 году – 85,2%, в 2012 году – 94,1%, в 2011 году – 85,3%.

Задания проверяют адекватность восприятия практико-ориентированных задач, изложенных неформализованным текстовым способом. Для их решения достаточно понимать текстовую информацию и уметь выполнять арифметические действия, делать прикидку и оценку, знать, что процент – это сотая часть величины. Причиной ошибок является

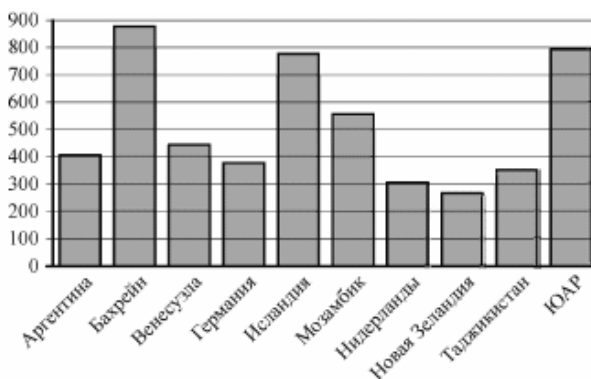
неумение старшеклассников правильно трактовать и интерпретировать условие задачи, а также невнимательность. Это одна из задач, решаемых подавляющим большинством выпускников.

В3. (2014) На графике показано изменение температуры в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На горизонтальной оси отмечено время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на вертикальной оси – температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, до скольких градусов Цельсия двигатель нагрелся за первые 3 минуты с момента запуска.

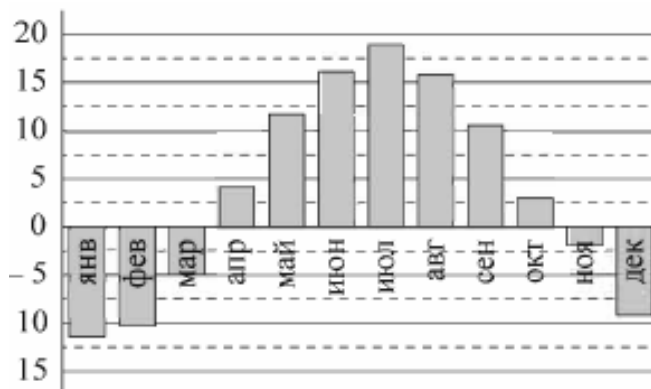


В2. (2013) На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2009 год.

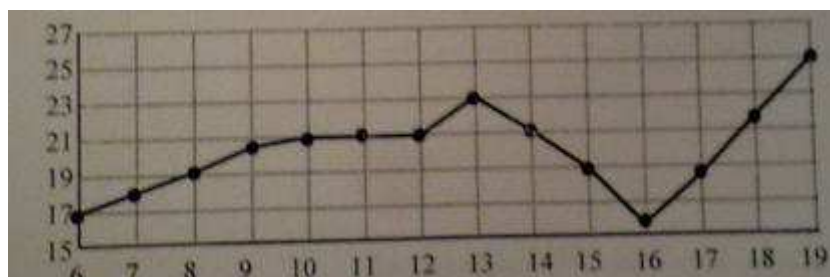
Среди представленных стран первое место по объему выплавки занимал Бахрейн, десятое место – Новая Зеландия. Какое место среди представленных стран занимал Мозамбик?



В2. (2012) На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха (в градусах Цельсия) в Нижнем Новгороде по результатам многолетних наблюдений. Найдите по диаграмме количество месяцев, когда среднемесячная температура в Нижнем Новгороде положительна.



В2. (2011) На рисунке жирными точками показано среднесуточная температура в Бресте каждый день с 6 по 19 июля 1981 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали - температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какой была наибольшая среднесуточная температура за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Тип задания:

Задание на применение приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: описание с помощью функций реальных зависимостей между величинами, чтение информации, представленной в таблицах, на графиках или диаграммах.

Характеристика задания:

Задание на чтение графика функции (диаграммы), связанных с реальной жизненной ситуацией. График характеризует изменение в зависимости от времени некоторой величины (температуры, стоимости акций и т.д.). Задание требует понимания текста и умения «читать» распространенную графическую информацию.

Процент правильных ответов в 2014 году – 93,8%, в 2013 – 96,7%, в 2012 – 97,7%, в 2011 – 95,2%.

Задача, позволяющая оценить уровень сформированности умения воспринимать и анализировать графическую информацию. При решении заданий такого типа требуется найти точку на оси абсцисс или ординат, удовлетворяющую условию задачи.

Вероятно, часть ошибочных ответов обусловлена невнимательным чтением условия задачи: экзаменуемые путают наибольшее и наименьшее

значения или вместо требуемого значения функции (аргумента) указывают значение аргумента (функции).

В4. (2014) Клиент хочет арендовать автомобиль на 2 суток для поездки протяженностью 400 км. В таблице приведены характеристики трех автомобилей и стоимость аренды.

Автомобиль	Топливо	Расход топлива (л на 100 км)	Арендная плата (руб. за 1 сутки)
А	Дизельное	5	3900
Б	Бензин	11	3100
В	Газ	15	3000

Помимо аренды клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Цена дизельного топлива — 19 рублей за литр, бензина — 23 рубля за литр, газа — 16 рублей за литр. Какую сумму в рублях заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешевый вариант?

В4. (2013) Своему постоянному клиенту компания сотовой связи решила предоставить на выбор одну из скидок. Либо скидку 20% на звонки других сотовых компаний в своем регионе, либо скидку 25% на звонки в другие регионы, либо скидку 30% на услуги мобильного интернета. Клиент посмотрел распечатку своих звонков и выяснил, что за месяц он потратил 625 рублей на звонки абонентам других компаний в своем регионе, 520 рублей на звонки в другие регионы и 410 рублей на мобильный интернет. Клиент предполагает, что в следующем месяце затраты будут такими же, и, исходя из этого, выбирает наиболее выгодную для себя скидку. Сколько рублей составит эта скидка, если звонки и пользование Интернетом сохранятся в прежнем объеме?

В4. (2012) В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 60 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки*	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки
А	200 руб.	Нет	13 руб.
Б	Бесплатно	15 мин. - 225 руб.	15 руб.
В	180 руб.	20 мин. - 200 руб.	14 руб.

*Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

В5. (2011) Семья из трех человек планирует поехать из Санкт-Петербурга в Вологду. Можно ехать поездом, а можно - на своей машине. Билет на поезд на одного человека стоит 760 рублей. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 700 км, а цена бензина равна 18.5 рубля за литр. Сколько рублей придется заплатить за наиболее дешевую поездку на троих?

Тип задания:

Задание на применение приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни: извлечение информации, представленной в таблицах, на графиках и диаграммах; решение задач социально-экономического и физического характера.

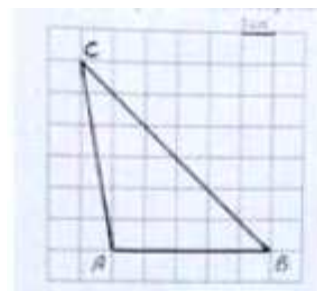
Характеристика задания:

Несложная текстовая задача (возможно с табличными данными) на оптимальное решение, моделирующая реальную ситуацию.

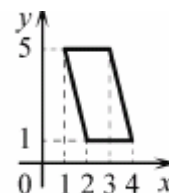
Процент правильных ответов в 2014 году – 95,0%, в 2013 – 80,8%, в 2012 – 74,4%, в 2011 – 84,4.

Чтобы решить задачу, достаточно вычислить стоимость поездки (товара), величину скидки в различных случаях, сравнить результаты и в ответе указать наименьшую (наибольшую) из них. При решении этой задачи требуется внимательность и аккуратность при вычислениях и записи ответа. По сравнению с предыдущим годом количество выпускников, которые справились с решением задачи такого типа, увеличилось почти на 14%.

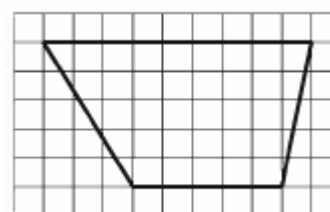
В5. (2014) На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см х 1 см изображен треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB (в сантиметрах)



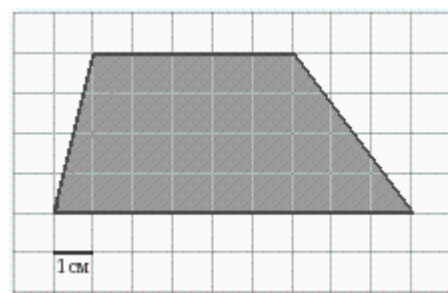
В3. (2013) Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке:



В3. (2012) Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах



В6. (2011) Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рисунок). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Тип задания:

Задание на нахождение геометрических величин (площадей, углов, длин).

Характеристика задания:

Задание на вычисление площади плоской фигуры, изображенной на клетчатой бумаге со стороной клетки 1 или на координатной плоскости.

Процент правильных ответов в 2014 году – 70,7%, 2013 – 86,4 %, в 2012 – 91, 6 %, в 2011 – 86,8%.

Площадь искомой фигуры может быть найдена по известной формуле. Например, при вычислении площади треугольника можно мысленно провести высоту к одной из его сторон, причем в качестве высоты и стороны

выбираются те, которые либо параллельны осям координат, либо длины которых выражаются целым числом делений сетки. Также задачу можно решить, разбив фигуру на части, вычисление площадей которых не представляет труда.

Ошибки связаны с недостаточным знанием формул площадей плоских фигур, неверным определением длин используемых для вычислений отрезков и с арифметикой.

В6. (2014) В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 6 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает?

В10. (2013) В сборнике билетов по философии всего 30 билетов, в 15 из них встречается вопрос по онтологии. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по онтологии.

В10. (2012) В среднем из 900 садовых насосов, поступивших в продажу, 27 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Тип задания:

Задание на определение вероятности некоторого случайного события.

Характеристика задания:

Задача на вычисление вероятности в простейшей практической ситуации.

Процент правильных ответов в 2014 году – 60,2%, в 2013 – 81,3%, в 2012 – 79,1%.

Задание такого типа в состав выпускной работы входит с 2012 года. Для его решения необходимо уметь определять количество благоприятных для наступления некоторого события исходов, а также число всех равновозможных исходов.

Возможные ошибки связаны с неверным прочтением условия задачи, с нахождением вероятности другого события (противоположного), неверными вычислениями.

В7. (2014) Найдите корень уравнения $\sqrt{-32-x} = 2$

В5. (2013) Найдите корень уравнения $\log_5(-9x+7)=2$

В5. (2012) Найдите корень уравнения $\log_2(x+11) = 4$.

В3. (2011) Найдите корень уравнения $\sqrt{52-3x} = 7$.

В3. (2010) Найдите корень уравнения $5^{x-18} = \frac{1}{25}$.

Тип задания:

Задание на умение решать уравнения и неравенства.

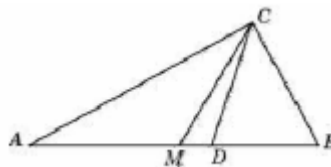
Характеристика задания:

Решение простейшего показательного, логарифмического, тригонометрического или иррационального уравнения.

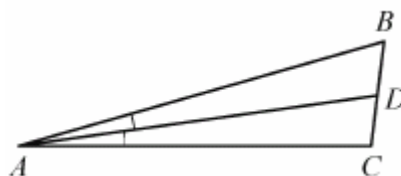
Процент правильных ответов в 2014 году – 89,1%, в 2013 – 81,8%, в 2012 – 82,7%, в 2011 – 83,9%, в 2010 – 76,42%.

Уравнение в одно действие сводится к линейному или квадратному. Неправильные ответы связаны в основном с арифметическими ошибками, ошибками при решении линейного уравнения или незнанием определения логарифмической и показательной функций. Для того чтобы исключить возможность арифметической ошибки в этой задаче, следует делать проверку полученного ответа путем его подстановки в заданное уравнение.

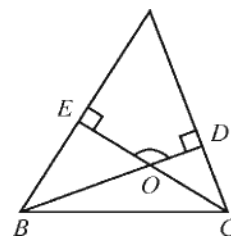
В8. (2014) Угол между биссектрисой и медианой прямоугольного треугольника, проведенными из вершины прямого угла, равен 20° . Найдите меньший угол прямоугольного треугольника.



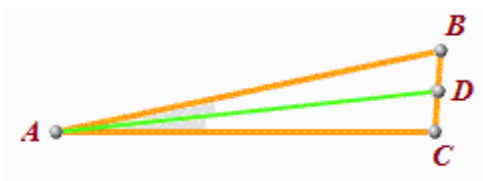
В6. (2013) В треугольнике ABC AD биссектриса, угол C равен 93° , угол CAD равен 6° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.



В6. (2012) В треугольнике ABC угол A равен 65° , углы B и C острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O . Найдите угол DOE . Ответ дайте в градусах



В4. (2011) В треугольнике ABC AD -биссектриса, угол C равен 108° , угол CAD равен 8° . Найдите угол B . Ответ дайте в градусах.



Тип задания:

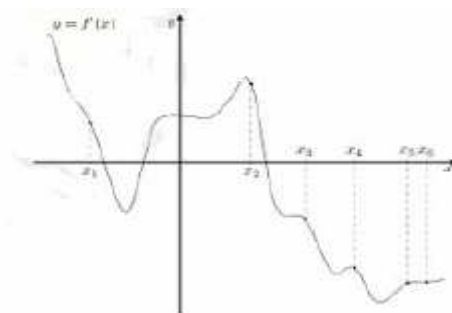
Задание на нахождение геометрических величин (углов, площадей, длин).

Характеристика задания:

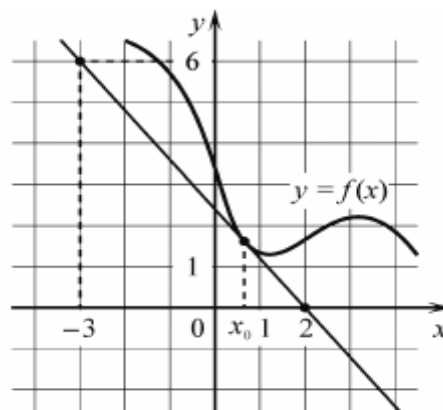
Задача по готовому чертежу, связанная с применением теоремы о сумме углов треугольника и понятием высоты (2012) или биссектрисы и медианы угла треугольника (2014, 2013, 2011). Это задание на знание простейших фактов из планиметрии и определений тригонометрических функций, на умение применять теорему Пифагора.

Процент правильных ответов в 2014 году – 58,1%, в 2013 – 82,8 %, в 2012 – 71,5 %, в 2011 – 69,6%.

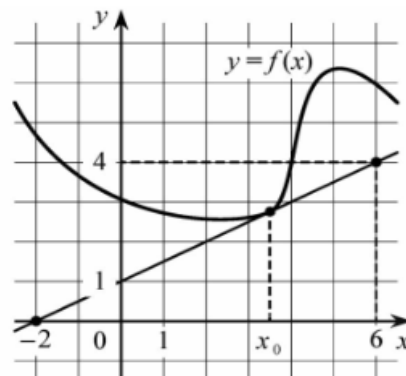
В9. (2014) На рисунке изображен график $y=f'(x)$ - производной функции, на оси абсцисс отмечены шесть точек $x_1, x_2, \dots, x_6$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



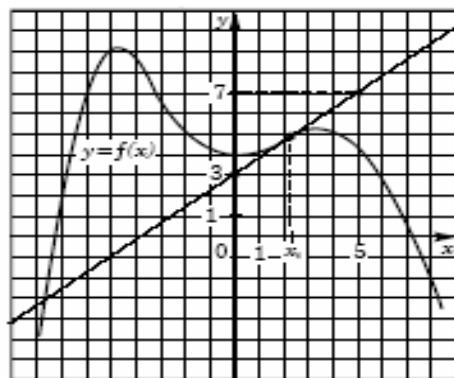
В8. (2013) На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f'(x)$ в точке x_0 .



В8. (2012) На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f'(x)$ в точке x_0 .



В8. (2011) На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f'(x)$ в точке x_0 .



Тип задания:

Задание на умение выполнять действия с функциями и производными функций, на исследование функций.

Характеристика задания:

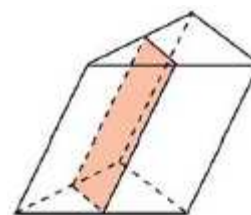
Традиционная для ЕГЭ по математике задача на чтение графика функции (графика производной функции) для ответа на вопрос о некотором

свойстве производной этой функции (самой функции). В данном задании нужно знать геометрический смысл производной, определение тангенса угла, но догадываться или что-то придумывать не нужно.

Процент правильных ответов в 2014 году – 54,2%, в 2013 – 59,9%, в 2012 – 49,7%, в 2011 – 63,3%.

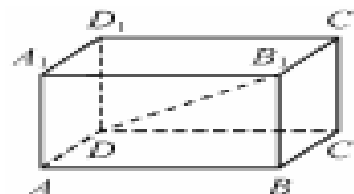
Ошибки связаны с невнимательным чтением условия задачи, неумением связывать свойства производной и функции, с непониманием геометрического смысла производной, а также в определении знака результата в зависимости от вида угла.

В10. (2014) Через среднюю линию основания треугольной призмы, объем которой равен 52, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найти объем отсеченной треугольной призмы



В9. (2013) Высота конуса равна 48, а длина образующей равна 50. Найдите диаметр основания конуса.

В9. (2012) В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AA_1 = 10$, $AB = 5$, $A_1 D_1 = 10$. Найдите длину диагонали DB_1 .



В9. (2011) Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 2. Найдите объем параллелепипеда.

Тип задания:

Задание на умение выполнять действия с геометрическими телами, координатами, векторами в пространстве.

Характеристика задания:

Задание на вычисление элементов, площадей поверхностей или объемов многогранников или тел вращения, в том числе вписанных или описанных около других многогранников или тел вращения.

Процент правильных ответов в 2014 году – 40,1%, в 2013 – 75,1%, в 2012 – 66,4%, в 2011 – 48,1%.

Для решения задачи достаточно знать свойства правильных призм и пирамид, формулы площадей поверхности и объемов пирамиды, призмы, конуса, цилиндра и шара, теорему Пифагора. Ошибки связаны с недостаточным знанием фактов планиметрии, отсутствием геометрического представления и вычислениями.

В11. (2014) Найдите значение выражения: $5\sin\frac{11\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12}$

В7. (2013) Найдите значение выражения: $-50 \operatorname{tg} 9^0 \operatorname{tg} 81^0 + 31$

В7. (2012) Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{34}}{34}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

В7. (2011) Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{-\sqrt{21}}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Тип задания:

Задание на умение выполнять преобразования и вычислять значения выражения.

Характеристика задания:

Задача на нахождение значения функции: тригонометрической, показательной или логарифмической.

Процент правильных ответов в 2014 году – 49,6%, в 2013 – 69,9%, в 2012 – 68,1%, в 2011 – 47,5%, в 2010 – 43,36%.

Наибольшие проблемы – в недостаточном знании свойств тригонометрических функций и соотношений между ними.

В12. (2014) Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1)^{\frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}}}$$

где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{эк}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина «Альфа», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 26, их средняя оценка равна 0,68, а оценка экспертов равна 0,23.

В12. (2013) При сближении звуковых источника и приемника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемая приемником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 120$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \frac{c+u}{c-v}(p)$ Гц, где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), $u = 7$ м/с и $v = 9$ м/с — скорости приемника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приемнике f будет не менее 125 Гц?

В12. (2012) Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 60 - 5p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = pq$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит 100 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

В10. (2011) В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин.) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 70$ мг. Период его полураспада $T = 9$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 17,5 мг?

Тип задания:

Задание на использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и в повседневной жизни

Характеристика задания:

Текстовое задание, моделирующее реальную ситуацию (экономический, физический или химический процессы).

Процент правильных ответов в 2014 году – 43,9%, в 2013 – 58,3%, в 2012 – 57,3%, в 2011 – 52,7%.

Решение задания сводится к составлению уравнения или неравенства, решением которого и является искомая величина. Наибольшие трудности у выпускников – в составлении соотношения по условию задачи, в неправильном понимании условия; неумении оптимизировать вычислительные сложности.

В13. (2014) Площадь основания конуса равна 36π , высота – 10. Найти площадь осевого сечения этого конуса.

В11. (2013) Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки B , A_1 , B_1 , C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 9, а боковое ребро равно 8.

В11. (2012) В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

Тип задания:

Задание на нахождение геометрических величин (углов, длин, площадей, объемов) в пространстве.

Характеристика задания:

Текстовое задание, моделирующее реальную ситуацию, предполагает применение основных формул, связанных с вычислением площадей поверхностей или объемов многогранников или тел вращения.

Процент правильных ответов в 2014 году – 44,6%, в 2013 – 56,1%, в 2012 – 25,6%.

Сравнительно несложная задача практического содержания, сводящаяся к подстановке данных числовых значений величин в формулу

объема и решению простейшего уравнения. Многие выпускники не приступают к решению, так как иногда просто пугаются геометрических задач.

В14. (2014) Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 225 кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго сплава?

В13. (2013) Шесть одинаковых рубашек дешевле куртки на 1%. На сколько процентов восемь таких же рубашек дороже куртки?

В13. (2012) На изготовление 540 деталей первый рабочий затрачивает на 12 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

В12. (2011) Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 50 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 5 часов позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Тип задания:

Задание на умение строить и исследовать простейшие математические модели.

Характеристика задания:

Традиционная текстовая задача на смеси (сплавы), работу или «движение», сводящаяся к составлению и решению дробно-рационального уравнения.

Процент правильных ответов в 2014 году – 43,3%, в 2013 – 59,4%, в 2012 – 37,3%, 2011 – 57,5%.

Наибольшие трудности возникают при составлении уравнения по условию задачи, из-за неумения решать дробно-рациональные уравнения.

B15. (2014) Найти точку максимума функции $y=0,5x^2-7x+12\ln x+8$.

B14. (2013) Найдите наименьшее значение функции $y=4\cos x+13x+9$ на отрезке $[0; 3\pi/2]$.

B14. (2012) Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 8)^2(x - 7) - 8$ на отрезке $[7,5;18]$.

B11. (2011) Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 4x^2 + 4x - 4$ на отрезке $[-4;-1]$.

Тип задания:

Задание на умение выполнять действия с функциями.

Характеристика задания:

Задание на вычисление точек экстремума данной функции или на нахождение наибольшего (или наименьшего) значения функции на отрезке.

Процент правильных ответов в 2014 году – 36,7%, в 2013 – 58%, в 2012 – 31,7%, в 2011 – 41,7%.

Классическая задача темы «Применение производной к исследованию функции» оказалась самой «нерешаемой» в части В. Основные ошибки связаны с неуверенным владением алгоритма вычисления наибольшего (наименьшего) значения функции на заданном отрезке, неумением дифференцировать функции.

ЧАСТЬ С

Все задания части С в определенной степени проверяли математическую компетентность школьников, поскольку для их выполнения требовалось не только воспроизведение изученного, но и анализ относительно новой ситуации и самостоятельный поиск способа решения проблемы, которая была поставлена перед выпускником.

C1. (2014) а) Решите уравнение $2\cos^2(3\pi/2+x)+\sqrt{3}\sin x=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[5\pi/2; 4\pi]$.

C1. (2013) а) Решите уравнение $\sin 2x=\cos(3\pi/2+x)$.

6) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3\pi/2; 5\pi/2]$.

C1. (2012) а) Решите уравнение $4 \cos^2 x + 4 \sin x - 1 = 0$.

6) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 5\pi/2]$.

C1. (2011) Решите уравнение

$$(2 \cos^2 x + 11 \cos x + 5) \cdot \log_{18}(\sin x) = 0.$$

Тип задания:

Уравнение или система уравнений повышенного уровня сложности.

Характеристика задания:

Решение тригонометрического или комбинированного уравнения (тригонометрическо-иррационального или тригонометрическо-логарифмического 2011г.) с отбором корней.

Процент положительных оценок в 2014 году – 28,9%, в 2013 – 23,5%, в 2012 – 30%, в 2011 – 34,5%.

Решение этого задания по силам большинству хорошо успевающих по математике выпускников. Как правило, уравнение требует замены переменной, позволяющей свести уравнение к квадратному уравнению и проведения отбора корней, обусловленных ограниченностью новой переменной или областью допустимых значений переменной.

Основные ошибки связаны с:

- неумением решать тригонометрические уравнения заменой переменной;
- незнанием формул для решения простейших тригонометрических уравнений;
- незнанием свойств ограниченности синуса и косинуса;
- незнанием табличных значений тригонометрических функций;
- потерей решения из-за деления на множитель, обращающий в ноль обе части уравнения;

- неумением отбирать решения тригонометрического уравнения с помощью тригонометрической окружности, решения неравенств или перебора.

С2. (2014) В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC , ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MA равно 6. На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $AD = AL = 2$ и $BE = 1$. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E, D и L .

С2. (2013) В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона основания равна 22, боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру $B_1 C_1$ и делит его в отношении 6:5 считая от вершины B_1 . Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K .

С2. (2012) В правильной треугольной призме $ABC A_1 B_1 C_1$ стороны основания равны 2, боковые ребра равны 3, точка D — середина ребра CC_1 . Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1 .

С2. (2011) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, стороны основания которой равны 5, а боковые ребра равны 11, найдите расстояние от точки A до прямой $E_1 D_1$.

Тип задания:

Стереометрическая задача повышенного уровня сложности.

Характеристика задания:

Стереометрическая задача на вычисление отрезков, площадей, углов в многогранниках или телах вращения. В 2014 году используемое тело в этой задаче не является правильным и, видимо, это стало основной причиной низких результатов (последствие «натаскивания»).

Процент положительных оценок в 2014 году — 1,3%, в 2013 — 15,8%, в 2012 — 3,6%, в 2011 — 10,9%.

Основные ошибки связаны с:

- неумением построить отрезок, который будет являться расстоянием от точки до плоскости или до прямой или построить угол между плоскостями;
- неумением анализировать пространственные конфигурации;
- неумением использовать факты и теоремы, связанные с перпендикулярностью или параллельностью прямых и плоскостей;
- неумением задавать координаты конкретных точек в введенной системе координат;
- вычислительные ошибки.

СЗ. (2014) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x + 7 \cdot 2^{-x} \geq 8, \\ 2 \log_{(x^2 - 6x + 10)^2} (5x^2 + 3) \leq \log_{x^2 - 6x + 10} (4x^2 + 7x + 3). \end{cases}$$

СЗ. (2013) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x} \frac{(x-4)^8}{x+5} \geq 8, \\ \frac{x^2 - 3x - 5}{x-4} + \frac{x^2 - 6x + 3}{x-6} \leq 2x + 1. \end{cases}$$

СЗ. (2012) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^{2x} + 12 \cdot 4^{-x} \leq 13, \\ \log_{0,04} 125x \cdot \log_{25x} 5 + \frac{3}{4} \geq 0. \end{cases}$$

СЗ. (2011) Решите неравенство $\frac{2 \cdot \log_5 (x^2 - 5x)}{\log_5 x^2} \leq 1$.

Тип задания:

Система неравенств (неравенство) повышенного уровня сложности.

Характеристика задания:

Решение системы неравенств или неравенства, содержащих степени, дроби, корни, логарифмы.

Процент положительных оценок в 2014 году – 19,3%, в 2013 – 11,6%, в 2012 – 12,2%, в 2011 – 13,9%%.

Основные ошибки:

- неумение выполнять тождественные преобразования логарифмических выражений, решать логарифмические неравенства;
- неумение разложить квадратный трехчлен на множители;
- неучет ОДЗ;
- плохое знание свойств неравенств;
- вычислительные ошибки.

С4. (2014) Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.

б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 2 и 18.

С4. (2013) Окружности радиусов 11 и 21 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке C , AO_1 и BO_2 – параллельные радиусы этих окружностей, причем $\angle AO_1O_2 = 60^\circ$. Найдите AB .

С4. (2012) Синус угла при основании равнобедренного треугольника равен $8/17$, а основание равно 60. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

С4. (2011) Окружность вписана в равнобедренную трапецию, основания которой равны 18 и 50. Прямая, проходящая через центр окружности и вершину трапеции, отсекает от трапеции треугольник. Найдите отношение площади этого треугольника к площади трапеции.

Тип задания:

Планиметрическая задача повышенного уровня сложности.

Характеристика задания:

Задача на свойства касания окружностей, нахождение длин сторон треугольников, площадей фигур.

Процент положительных оценок в 2014 году – 1,5%, в 2013 – 9,9%, в 2012 – 3,7%, в 2011 – 4,9%.

В этом году результаты выполнения этого задания оказались достаточно низкими (уменьшились в 6,5 раз). Этот результат свидетельствует о поверхностном уровне освоения выпускниками геометрии на плоскости. В прошлые годы задача С4, которая предлагалась на экзамене, являлась многокритериальной – у нее имелось несколько различных решений, все из которых необходимо было отыскать. В этот раз наличие нескольких решений убрали, но добавили пункт с доказательством некоторого геометрического факта. А так как в большинстве школ в последнее время на уроках геометрии совсем не изучают доказательств теорем, не учат рассуждать, то для многих данное задание оказалось не по силам.

Основные ошибки:

- неверное понимание условия задачи;
- незнание признаков и определений основных геометрических фигур;
- незнание свойств касательных;
- вычислительные ошибки.

С5. (2014) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $((a-1)x^2+3x)^2-2((a-1)x^2+3x)+1-a^2=0$ имеет ровно два решения.

С5. (2013) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^2+(a+7)^2=|x-7-a|+|x+a+7|$ имеет единственный корень.

С5. (2012) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $a|x-5|=\frac{2}{x+1}$ на промежутке $[0; +\infty)$ имеет более двух корней.

С5. (2011) Найдите все значения a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} (x-4)^2+(y-4)^2=9 \\ y=|x-a|+1 \end{cases}$$
 имеет ровно три различных решения.

Тип задания:

Задача с параметром высокого уровня сложности.

Характеристика задания:

Задача на решение уравнения (неравенства, системы уравнений или неравенств) с параметром.

Процент положительных оценок в 2014 году – 4,1%, в 2013 – 4%, в 2012 – 5,2%, в 2011 – 6%.

Это задание является одним из самых сложных заданий ЕГЭ. Для успешного решения этой задачи важно свободно оперировать с изученными определениями, свойствами, применять их в различных ситуациях, уметь анализировать условие и находить возможные пути решения. Очевидно, что это задание по силам выпускникам математических классов, имеющим достаточный опыт решения задач с параметрами. Большой процент участников экзамена даже не приступали к выполнению этого задания. Основные проблемы – ошибки в понимании логики анализа задачи, неумение делать необходимые обоснования, неумении строить графики.

С6. (2014) На сайте проводится опрос, кого из 152 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 16 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 31. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста?

б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться не менее чем на 32?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?

С6. (2013) Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет записан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

- а) На доске выписан набор -8, -5, -4, -3, -1, 1, 4. Какие числа были задуманы?
- б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 2 раза.

Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

- в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

С6. (2012) Моток верёвки режут без остатка на куски длиной не меньше 120 см, но не больше 124 см (назовём такие куски стандартными).

- а) Некоторый моток верёвки разрезали на 30 стандартных кусков, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток верёвки?
- б) Найдите такое наименьшее число L , что любой моток верёвки, длина которого больше L см, можно разрезать на стандартные куски.

С6. (2011) Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

- а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
- б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
- в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Тип задания:

Задание практической направленности, выявляющее умение связывать реальные ситуации с математическими объектами и их свойствами.

Характеристика задания:

Задача практического содержания, связанная с делением с остатком, свойствами чисел, логическим перебором, нахождением наибольших и наименьших значений выражений в целых числах.

Процент положительных оценок в 2014 году – 6,3%, в 2013 – 11,5%, в 2012 – 6,2%, в 2011 – 8,7%.

Задание С6 составляется таким образом, что, с одной стороны, тематически оно вполне доступно всем участникам экзамена, а с другой стороны, для его решения требуется не столько формальная математическая образованность (знание терминов, формул, правил, готовых алгоритмов), сколько общая математическая культура, способность анализировать нестандартную (незнакомую) задачу, строить и исследовать адекватную ситуации математическую модель. Это задание ближе к олимпиадному, рассчитанное на сильных выпускников, претендующих на поступление в вузы с высокими требованиями к математической подготовке. Наибольшие проблемы – отсутствие глубокого понимания математического инструментария, неумение использовать свойства целых чисел, ошибки в понимании логики задачи и анализе условия (неразвитость интеллектуальных способностей).

Ниже мы рассмотрим решения наиболее сложных задач и коснемся характерных ошибок.

4. Решение наиболее сложных заданий из вариантов 2014 года

С1. а) Решите уравнение $2\cos^2(3\pi/2+x) + \sqrt{3}\sin x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[5\pi/2; 4\pi]$.

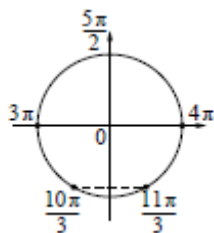
Решение:

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0, \quad \sin x (2\sin x + \sqrt{3}) = 0.$$

Значит, либо $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, либо $\sin x = -\sqrt{3}/2$, откуда $x = -\pi/3 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$, или $x = -2\pi/3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $[5\pi/2; 4\pi]$:



Получим числа $3\pi; 10\pi/3; 11\pi/3; 4\pi$.

Ответ: а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\pi/3 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}; -2\pi/3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) $3\pi; 10\pi/3; 11\pi/3; 4\pi$.

С1. а) Решите уравнение $2\sin^2 x - \sqrt{3} \cos(\pi/2 - x) = 0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3\pi/2; 3\pi]$.

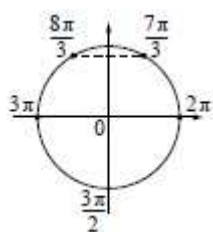
Решение:

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x = 0, \sin x (2 \sin x - \sqrt{3}) = 0.$$

Значит, либо $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, либо $\sin x = \sqrt{3}/2$, откуда $x = \pi/3 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$, или $x = 2\pi/3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $[3\pi/2; 3\pi]$:



Получим числа $2\pi; 7\pi/3; 8\pi/3; 3\pi$.

Ответ: а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}; \pi/3 + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}; 2\pi/3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) $2\pi; 7\pi/3; 8\pi/3; 3\pi$.

По сравнению с прошлым годом критерии проверки задания С1 стали «мягче»:

Критерии проверки задания С1 в 2013 году		Критерии проверки задания С1 в 2014 году	
Содержание критерия	Баллы	Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2	Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1	Обоснованно получен верный ответ в пункте а или в пункте б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0	ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта а и пункта б	
Максимальный балл	2	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
		Максимальный балл	2

С этим заданием справилось 28,9% всех обучающихся (что на 5,4% больше, чем в прошлом году), причем по баллам получили соответственно:

Задание С1	0 баллов	1 балл	2 балла
Кол-во обучающихся (в %)	71,1	8,83	20,07

(здесь и далее среди обучающихся, получивших 0 баллов, учитываются и не приступившие к решению и те, кто за его решение получил 0 баллов).

Основные ошибки при решении этого задания были в следующем (в приведенных ниже фрагментах реальных работ выпускников они выделены красным маркером):

- потеря решения из-за деления на множитель, обращающий в ноль обе части уравнения:

Пример 1:

C1. $2 \sin^2 x - \sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$ раскрываем cos разности.

a) $2 \sin^2 x - \sqrt{3} (\cos \frac{\pi}{2} \cos x + \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin x) = 0$
 $2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x = 0$
 $-\sqrt{3} \sin x = -2 \sin^2 x \geq 0$
 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sin x}{\sin x}$
 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$
 $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k.$

б)  $[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}]$
 $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$
 $x = \pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k; x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$
 б) $x = \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$

Оценка: 0 баллов

- незнание табличных значений тригонометрических функций:

Пример 2:

C1.

a) $2 \cos^2(\frac{3\pi}{2} + x) + \sqrt{3} \sin x = 0$
 $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x = 0$
 $\sin x (2 \sin x + \sqrt{3}) = 0$
 $\sin x = 0$
 $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $k = 3:$
 $x = 3\pi$
 $k = 4:$
 $x = 4\pi$

$2 \sin x + \sqrt{3} = 0$
 $2 \sin x = -\sqrt{3}$
 $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $x = (-1)^n \cdot \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$
 $[\frac{3\pi}{2}; 4\pi]$

Оценка: 0 баллов

Пример 3:

$$2 \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sqrt{3} \sin x = 0$$

$$2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x = 0$$

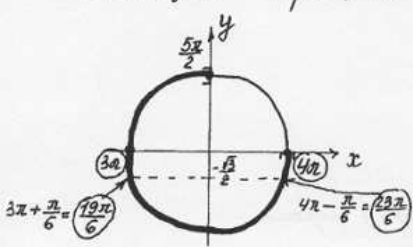
$$\sin x (2 \sin x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad 2 \sin x + \sqrt{3} = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

б) Отберём корни на промежутке $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$ с помощью тригонометрической окружности.



Получим числа: $x = \{3\pi; \frac{19\pi}{6}; \frac{23\pi}{6}; 4\pi\}$

Ответ: а) $\pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 б) $3\pi; \frac{19\pi}{6}; \frac{23\pi}{6}; 4\pi$.

Оценка: 0 баллов (несмотря на умение проводить отбор с помощью «тригонометрической окружности» допущенная ошибка не относится к разряду арифметических)

- незнание формул решения простейших тригонометрических уравнений:

Пример 4:

С1 | а) $2 \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + k\right) + \sqrt{3} \sin k = 0$
 б) $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

Решение: а) $2 \sin^2 k + \sqrt{3} \sin k = 0$
 $\sin k (2 \sin k + \sqrt{3}) = 0$

$\sin k = 0 \quad \left[\begin{array}{l} k = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ k = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) 1) $\frac{5\pi}{2} \leq 2\pi n < 4\pi \quad | : \pi; n \in \mathbb{Z}$
 $2,5 \leq 2n < 4 \quad | : 2; n \in \mathbb{Z}$
 $1,25 \leq n < 2, \quad n \in \mathbb{Z}$
 $n = 2$
 $k = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$

2) k-членное:
 $\frac{5\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} + \pi k < 4\pi \quad | : \pi; k \in \mathbb{Z}$
 $\frac{5}{2} \leq -\frac{1}{3} + k < 4 \quad | + \frac{1}{3}; k \in \mathbb{Z}$
 $2\frac{5}{6} \leq k < 4\frac{1}{3}; k \in \mathbb{Z}$
 $k = 4, \text{ н.к. } k\text{-членное.}$
 $k = -\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3}$

3) k-нечетное:
 $\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + \pi k < 4\pi \quad | : \pi; k \in \mathbb{Z}$
 $\frac{5}{2} \leq \frac{1}{3} + k < 4 \quad | - \frac{1}{3}; k \in \mathbb{Z}$
 $2\frac{1}{6} \leq k < 3\frac{2}{3}; k \in \mathbb{Z}$
 $k = 3$
 $k = \frac{\pi}{3} + 3\pi = \frac{10\pi}{3}$

Ответ: а) $x = 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$;
 $k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$
 б) $4\pi; \frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$. см. на обложке.

Оценка: 0 баллов. Кроме этого, выпускник не может правильно воспользоваться формулой в зависимости от четности входящего в нее параметра k .

Пример 5:

C1. $2\sin^2 x - \sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$

Сначала преобразуем выражение: $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, получим:

$$2\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x = 0$$

$$\sin x (2\sin x - \sqrt{3}) = 0$$

$\sin x = 0$ или $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ или $2\sin x = \sqrt{3}$
 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$x = (-1)^k \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Теперь найдем корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $k = 1$
 $x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} \in [\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$

$k = 2$
 $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2} \in [\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$

$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $k = 2$
 $x = \frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{7\pi}{3} \in [\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
 б) $x = \frac{3\pi}{2}$; $x = \frac{5\pi}{2}$; $x = \frac{7\pi}{3}$

Оценка: 0 баллов

Пример 6:

C1. $2\sin^2 x - \sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$ $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$

а) $2\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x = 0$
 $\sin x (2\sin x - \sqrt{3}) = 0$
 $\sin x = 0$ или $2\sin x - \sqrt{3} = 0$
 $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ или $2\sin x = \sqrt{3}$
 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $x_2 = \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

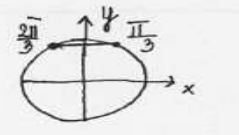
б) $\frac{3\pi}{2} \leq \pi n \leq 3\pi$
 $\frac{3}{2} \leq n \leq 3$
 $n = 2, 3$
 $x = \frac{2\pi}{3}$

$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + \pi n \leq 3\pi$
 $\frac{7\pi}{6} \leq \pi n \leq \frac{8\pi}{3}$
 $1\frac{1}{6} \leq n \leq 2\frac{2}{3}$
 $n = 2, x = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$

$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{2\pi}{3} + \pi n \leq 3\pi$
 $\frac{5\pi}{6} \leq \pi n \leq \frac{7\pi}{3}$
 $\frac{5}{6} \leq n \leq \frac{7}{3}$
 $n = 1, 2$
 $x = \frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3}$
 $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $\frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; 2π ; 3π .



Оценка: 0 баллов

Пример 7:

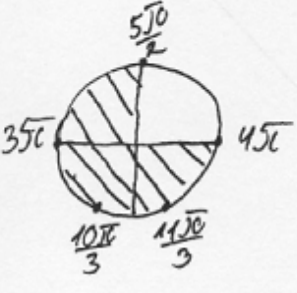
$$1) 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sqrt{3} \cdot \sin x = 0; 2\sin^2 x + \sqrt{3} \cdot \sin x = 0;$$

$$\sin x (2\sin x + \sqrt{3}) = 0; \sin x = 0 \text{ или } 2\sin x + \sqrt{3} = 0$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

a) $x = \pi n; n \in \mathbb{Z}$
 б) $3\pi; \frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}; 4\pi$
 Ответ: а) $\pi n; n \in \mathbb{Z};$ б) $3\pi; \frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}; 4\pi$
 $-\frac{\pi}{3} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$



Оценка: 1 балл (отбор корней с помощью числовой окружности проведен правильно)

- неверное применение основных тригонометрических формул (в частности, формулы приведения):

Пример 8:

а) $2\sin^2 x - \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ б) $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

$$2\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x = 0$$

$$\sin x (2\sin x + \sqrt{3} \sin x) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ или } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \pi n; n \in \mathbb{Z} \text{ или } x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

б) $\frac{3\pi}{2} \leq \pi n \leq 3\pi \quad | : \pi$ $\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 3\pi$
 $\frac{3}{2} \leq n \leq 3 \Rightarrow n = 2; 3$ $-\frac{8}{12} \leq n \leq \frac{17}{12} \Rightarrow n = 0; 1$

Ответ: а) $\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$
 б) $\pi; 2\pi; 3\pi; \frac{13\pi}{6}; \frac{25\pi}{6}; \frac{37\pi}{6}$

Оценка: 0 баллов (в этом примере выпускник не знает также табличные значения тригонометрических функций).

- часть допущенных ошибок связана с неучетом четности степени одной из тригонометрических функций, содержащейся в уравнении:

Пример 9:

C1. $2\cos^2(\frac{3\pi}{2} + x) + \sqrt{3}\sin x = 0 \quad x \in [\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

$-2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0$

$2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x = 0$

$\sin x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$

$\sin x = 0 \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pi n \quad x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

$n=1 \quad x = \pi \notin \quad x = \frac{7\pi}{3} \notin \quad x = \frac{8\pi}{3} \in$

$n=3 \quad x = 3\pi$

Ответ: а) $x = \pi n$; $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$
 б) 3π ; $\frac{8\pi}{3}$

Оценка: 0 баллов (эта ошибка не является арифметической)

Пример 10:

C1. а) $2\cos^2(\frac{3\pi}{2} + x) + \sqrt{3}\sin x = 0$ ОДЗ: $\sin^2 x \geq 0$
 $-2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0$ $\sin x \geq 0$
 $\sin x(-2\sin x + \sqrt{3}) = 0$ $x \geq \pi, \forall x \in \mathbb{Z}$

$\sin x = 0 \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

б) проведем проверку корней на промежутке $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$.

при $k, n=2$ $x = 2\pi \notin [\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \notin [\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \notin [\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

при $n, k=4$ $x = 4\pi \in [\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

$x = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3} \notin [\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

$x = -\frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{11\pi}{3} \in [\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

при $k, n=3$ $x = 3\pi \in [\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

$x = -\frac{\pi}{3} + 3\pi = \frac{8\pi}{3} \in [\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

$x = \frac{\pi}{3} + 3\pi = \frac{10\pi}{3} \notin [\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

при $k, n=5$ $x = 5\pi \notin [\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

$x = -\frac{\pi}{3} + 5\pi = \frac{14\pi}{3} \notin [\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

$x = \frac{\pi}{3} + 5\pi = \frac{16\pi}{3} \notin [\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

Ответ: $\pi n, (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k; n, k \in \mathbb{Z};$
 $\frac{8\pi}{3}, 3\pi, \frac{10\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, 4\pi.$

Оценка: 0 баллов (кроме того, выпускник ошибается в формуле решений, а также при записи ОДЗ уравнения)

- неумение отбирать решения тригонометрического уравнения (с помощью тригонометрической окружности или путем решения двойных

неравенств).

- ошибки, связанные (хочется надеяться) с невнимательностью:

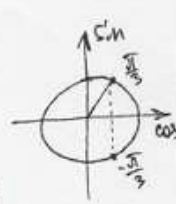
Пример 11:

а). $2\sin^2 x - \sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0;$
 $2\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x = 0;$
 $\sin x (2\sin x - \sqrt{3}) = 0;$
 $\sin x = 0$ или $2\sin x - \sqrt{3} = 0$
 $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ $2\sin x = \sqrt{3}$
 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
 $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
 $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

б). $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

$\frac{3\pi}{2} \leq \pi n \leq 3\pi$	$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 3\pi$	$\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq 3\pi$
$3\pi \leq 2\pi n \leq 6\pi$	$9\pi \leq 2\pi + 12\pi n \leq 18\pi$	$9\pi \leq -2\pi + 12\pi n \leq 18\pi$
$3 \leq 2n \leq 6$	$9 \leq 2 + 12n \leq 18$	$9 \leq -2 + 12n \leq 18$
$\frac{3}{2} \leq n \leq \frac{6}{2}$	$7 \leq 12n \leq 16$	$11 \leq 12n \leq 20$
$1,5 \leq n \leq 3$	$\frac{7}{12} \leq n \leq \frac{16}{12}$	$\frac{11}{12} \leq n \leq \frac{20}{12}$
$n = 2; x = 2\pi.$	$n = 1; x = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$	$n = 1; x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$
$n = 3; x = 3\pi$		

Ответ: а). $\pi n, n \in \mathbb{Z}; (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$
 б). $3\pi, 2\pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}.$



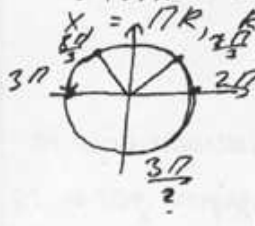
Оценка: 1 балл (решение уравнения найдено правильно, но при отборе корней, когда выпускник стал работать с двойными неравенствами, используются ошибочные соотношения).

Пример 12:

С1 $2\sin^2 x - \sqrt{3} \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$ $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$
 $2\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x = 0.$
 $\sin x (2\sin x - \sqrt{3}) = 0$
 $\sin x = 0$ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $x_1 = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

$2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$
 $3\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$

Ответ: а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}; (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$
 б) $2\pi; \frac{4\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}.$



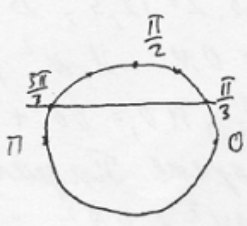
Оценка: 0 баллов (выпускник механически, не обращая внимания на индексы, выписывает формулу решения, а также теряет корень при отборе с помощью числовой окружности)

Пример 13:

4) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0.$
 $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x = 0$; $\sin x = t$
 $2t^2 - \sqrt{3}t = 0.$
 $\cancel{2} \cdot t(2t - \sqrt{3}) = 0.$
 $t = 0$; $2t - \sqrt{3} = 0$
 $\sin x = 0$ $2\sin x - \sqrt{3} = 0$
 $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

5) $\frac{3\pi}{2} \leq \pi k \leq 3\pi$ $\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq 3\pi$ $\frac{3\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi k \leq 3\pi$
 $\frac{3}{2} \leq k \leq 3$ $\frac{7\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{8\pi}{3}$ $-\frac{\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{4\pi}{3}$
 $k = 2; 3 \Rightarrow$ $\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{4}{3}$ $-\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{2}{3}$
 $2\pi; 3\pi.$ $k = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$ $k = 0 \Rightarrow \frac{5\pi}{3}$
 Ответ: $2\pi; 3\pi; \frac{7\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}.$



Оценка: 1 балл (точки, соответствующие корням одного из простейших уравнений на числовой окружности отмечает правильно, а формулу, их определяющую, выписывает неверно. Работать с двойными неравенствами умеет)

C2. В треугольной пирамиде $MAVC$ основанием является правильный треугольник ABC , ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро MA равно 6. На ребре AC находится точка D , на ребре AB находится точка E , а на ребре AM — точка L . Известно, что $AD = AL = 2$ и $BE = 1$. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки E, D и L .

Решение:

1 способ (из критериев)

Пусть N — середина BC , K — основание перпендикуляра, опущенного из L на плоскость основания, P — основание перпендикуляра, опущенного из K на DE . Отрезок LK параллелен MB , поэтому точка K лежит на ребре AB и делит его в отношении $1:2$,

$$LK = \frac{1}{3}MB = \frac{1}{3}\sqrt{MA^2 - AB^2} = \sqrt{3}.$$

В треугольнике ABC имеем $AE:EB = AD:DC = 2:1$, значит, прямые DE и BC параллельны. Следовательно, треугольники ABN и KEP подобны и

$$KP = \frac{KE}{AB} \cdot AN = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Прямая DE перпендикулярна KP и LK , поэтому искомый угол между плоскостями равен углу KPL . В прямоугольном треугольнике KPL имеем

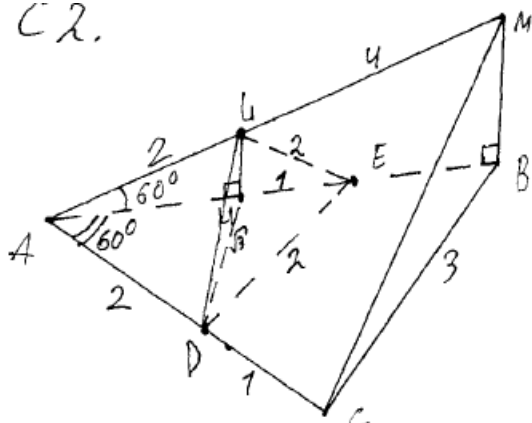
$$\operatorname{tg} \angle KPL = \frac{KL}{KP} = 2.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} 2$.

Заметим, что в зависимости от способа решения, искомая величина может быть выписана через любую из обратных тригонометрических функций: или $\operatorname{arctg} 2$, или $\arccos 1/\sqrt{5}$, или $\arcsin 2/\sqrt{5}$.

2 способ (из реальной выпускной работы):

С 2.



Дано: $MABC$ — пирамида
 $\triangle ABC$ — правильный
 $MB \perp ABC$, $AB=3$, $MA=6$
 $D \in AC$, $L \in AM$, $E \in AB$.
 $AD=AL=2$, $BE=1$.
 Найти: $(ABC; DLE)$

Решение:

1) В $\triangle AMB$ из т. L опустим ~~высо~~ перпендикуляр на AB . Он пересечётся с AB в т. H .

В этом же треугольнике $AB:AM = 1:2$ и

$\triangle AMB$ — прямоугольный, значит $\angle AMB = 30^\circ$, а $\angle MAB = 60^\circ$.

$\triangle AMB \sim \triangle AHL$ ($\angle MAB$ — общий, $\angle LMA = \angle MBA = 90^\circ$)

$$\frac{AL}{AM} = \frac{AH}{AB} = \frac{1}{3} \quad | \Rightarrow \quad AM = AB \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$AM=1$, $BE=1$ по условию, значит $HE=1$

2) В $\triangle AED$ по т. косинусов найдём DE :

$$DE = \sqrt{8 - 8 \cdot \frac{1}{2}} = 2$$

$\triangle ADE$ — равнобедренный, DH — медиана и высота ($AM=HE$)

В $\triangle DHE$ найдём DH по т. Пифагора:

$$DH = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

3) В $\triangle ALE$ по т. косинусов найдём LE :

$$LE = \sqrt{8 - 8 \cdot \frac{1}{2}} = 2$$

В $\triangle AMC$ найдём $\cos \angle MAC$ по т. косинусов:

$$CM^2 = AM^2 + AC^2 - 2 \cdot AM \cdot AC \cdot \cos \angle MAC$$

$$36 = 45 - 36 \cdot \cos \angle MAC$$

$$\cos \angle MAC = \frac{1}{4}$$

4) Найдём LD в $\triangle ALD$:

$$LD = \sqrt{2^2 + 2^2 - 8 \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{6}$$

5) Площадь DHE равна ABC , т.к. $\triangle DHE \in \triangle ABC$.

Значит $(ABC; \angle ED) = (DHE; \angle ED)$.

По теореме о фигуре и её проекции $S_{LED} \cdot \cos(\angle DHE; \angle ED) = S_{DHE}$

$$S_{HDE} = \frac{1}{2} DH \cdot HE = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{LDE} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p - \text{полупериметр, } a, b, c - \text{стороны}$$

$$p = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

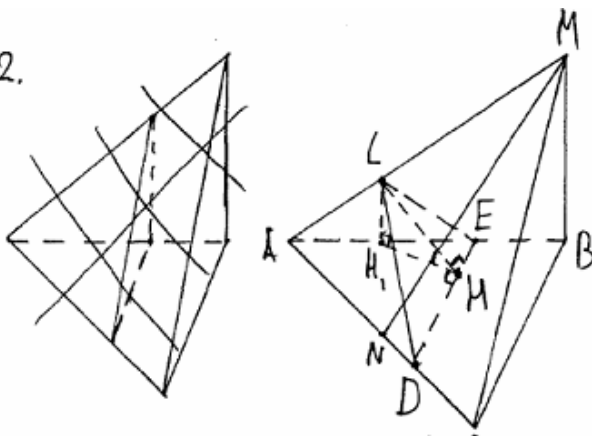
$$S_{LDE} = \sqrt{\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(4 - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\cos(\widehat{DME}, \widehat{LED}) = \frac{S_{DHE}}{S_{LED}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{ответ. } \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$$

3 способ:

с2.



Дано: MABC - пирамида
 $\triangle ABC$ - правильный
 $AB = BC = AC = 3$
 $AM = CM = 6$ $MB \perp ABC$
 $D \in AC$ $AD = 2$
 $L \in AM$ $AL = 2$
 $E \in AB$ $BE = 1$

Найти: $(\widehat{LDE}, \widehat{ABC})$

Решение

- $AE = AB - BE = 2$
- $\triangle ABM$ - прямой. $\cos \angle MAB = \frac{AB}{AM} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\angle MAB = 60^\circ$
- $\triangle ALE$ $AL = AE$ $\angle LAE = \angle MAB = 60^\circ \Rightarrow \triangle ALE$ - равносторонний
 (по признаку равностороннего треугольника)

$$LE = AL = AE = 2$$

4. $\triangle AMC$ - равнобедренный MN - высота к основанию, ~~также~~ $AN = NC = \frac{1}{2} AC = 1,5$
и биссектриса и медиана.

$$\cos \angle NAM = \frac{AN}{AM} = \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4}$$

$$5. \triangle ABC \text{ и } \triangle ADE \quad \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}, \angle A - \text{общий}$$

$\triangle ABC$ и $\triangle ADE$ - подобны по двум пропорциональным сторонам и равному углу между ними. $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow DE = 2$

6. LH_1 - высота в $\triangle ALE$

LH - высота в $\triangle DLE$

HH_1 - проекция LH на плоскость ABC (по ~~трём~~ ~~перпендикулярам~~ по теореме о трёх перпендикулярах $HH_1 \perp DE$)

$\angle LHH_1$ - линейный угол между плоскостями ABC и LDE

$$7. LH_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2} = \sqrt{3} \quad (\text{высота в равностороннем } \triangle)$$

$$8. \triangle ALD \text{ и } \triangle ELD - AL = AD = EL = ED = 2, LD - \text{общая}$$

$\triangle ALD = \triangle ELD$ по трём сторонам; $\angle LAD = \angle LED$

$$\cos \angle LAD = \cos \angle LED = \frac{1}{4} \quad \sin \angle LED = \sqrt{1 - \cos^2 \angle LED} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

9. $\triangle LHE$ - прямоугольный (LH - высота в $\triangle LED$)

$$LH = LE \cdot \sin \angle LED = 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

10. $\triangle LHH_1$ - прямоугольный

$$\sin \angle LHH_1 = \frac{LH_1}{LH} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0,4\sqrt{5}$$

4 способ (координатный метод):

С2. Дано: $MABC$ - трехгранная пирамида, $\triangle ABC$ - правильный, $MB \perp (ABC)$; $AB=BC=AC=3$; $\angle A=6^\circ$; $AD=AL=2$; $BE=1$

Найти: $\angle \varphi((ABC); (DEL))$.

Решение: Введем систему координат XYZ :

1) $ax+by+cz+d=0$ - общее уравнение плоскости.

$E(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0,5; 0)$ (из $\triangle BKE$: $BE=1$; $BK=x$; $KE=0,5$,

м.к. $\triangle BKE$ и $\triangle BSA$ подобны,

$SA=1,5$, коэффициент подобия равен $\frac{SA}{BE}=3$)

(см. вогнутой вертеле).

$D(\frac{\sqrt{3}}{2}; 2,5; 0)$ (аналогично м. E)

$L(\sqrt{3}; 1; \sqrt{3})$ (м.к. м. L проектируется в

м. $L'(N)$, то $DL=LN=\sqrt{3}$;

$PL=y=1$ (из подобия прямоугольников BPL и BSA)).

2) $z=0$ - уравнение плоскости (ABC)

м. E $\in$ плоскости (DEL) , следовательно $\frac{\sqrt{3}}{2}a + 0,5b + d = 0$

м. D $\in$ плоскости (DEL) , следовательно $\frac{\sqrt{3}}{2}a + 2,5b + d = 0$

м. L $\in$ плоскости (DEL) , следовательно $\sqrt{3}a + b + \sqrt{3}c + d = 0$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}a + 0,5b + d = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + 2,5b + d = 0 \\ \sqrt{3}a + b + \sqrt{3}c + d = 0 \end{cases}$$

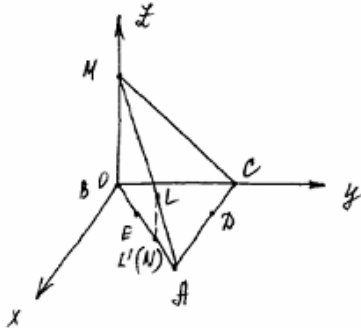
$$\begin{cases} d = -\frac{\sqrt{3}}{2}a - 0,5b \\ b = 0 \\ \sqrt{3}a + \sqrt{3}c - \frac{\sqrt{3}}{2}a - 0,5b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = -\frac{\sqrt{3}}{2}a \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{2}a \end{cases}$$

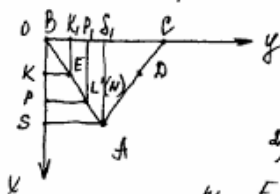
$$ax - \frac{1}{2}ay - \frac{\sqrt{3}}{2}a = 0 \quad | : a : a$$

$$x - \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad | \times 2$$

$$2x - y - \sqrt{3} = 0 - \text{уравнение плоскости } (DEL)$$



Вогнутой чертеле:



$$3) \quad \cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{|0 + 0 - 1|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{4+1}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\angle \varphi = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$.

С прошлого года критерии оценивания задания С2 не изменились:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено ИЛИ при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Заметим, что если при решении использовались элементы векторной геометрии (например, составление уравнения плоскости с помощью вычисления определителя), то наличие арифметической ошибки приводило к оцениванию задания «0» баллов (эта теория дается на факультативах по математике и не входит ни в один базовый школьный учебник по геометрии. Поэтому, если выпускник ее использует, то должен при этом не ошибаться). Также «0» баллов ставилось, если при решении векторным методом координаты точек сечения определялись неверно.

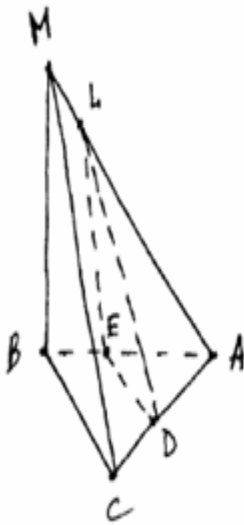
С этим заданием справились 1,3% всех обучающихся, причем по баллам получили соответственно:

Задание С2	0 баллов	1 балл	2 балла
Кол - во обучающихся (в %)	98,7	0,72	0,58

Основные ошибки были в следующем:

- неверное определение линейного угла искомого двугранного угла между заданными плоскостями. Это самая распространенная ошибка.

Пример 14:



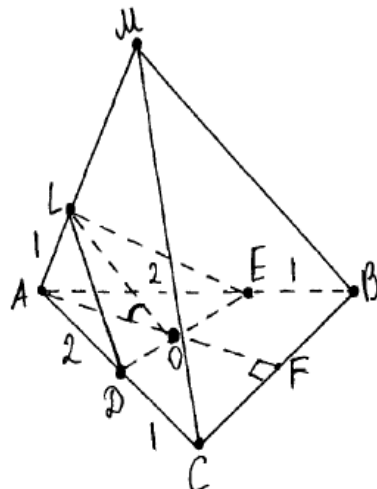
Дано: $MABC$ - трехгранная пирамида;
 $\triangle ABC$ - основание; $\triangle ABC$ - равнобедренный;
 $MB \perp ABC$, $AB = 3$; $MA = 6$; $AD = 2$,
 $BE = ML = 1$

Найти: $\angle LEB$

Оценка: 0 баллов

Пример 15:

(C2)



Дано: $MABC$ - трехгранная пирамида.

$MB \perp (ABC)$; $AB = BC = AC = 3$.

$MA = 6$; $L \in AM$; $D \in AC$; $E \in AB$.

$AD = 2$; $BE = AL = 1$

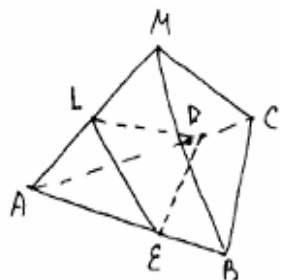
Найти: $\angle ((ABC); (DEL)) - ?$

Решение.

- 1) Проведем высоту LO в плоскости DEL .
 - 2) Проведем высоту AF в плоскости ABC .
 - 3) Эти высоты пересекутся в точке O .
- Значит, $\angle LOA$ - искомый угол.

Оценка: 0 баллов

Пример 16:



Дано: $MABC$ - пирамида, $\triangle ABC$ - правильный,
 $MB \perp (ABC)$, $AC = 3$, $MA = 6$, $D \in AC$,
 $E \in AB$, $L \in AM$; $AD = AL = 2$; $BE = 1$
 Найти: $\angle$ между (ABC) и (ELD)

Решение: $\angle$ между (ABC) и (ELD) это есть $\sin \angle MAB$;
 $\angle MAB$ - искомая величина.

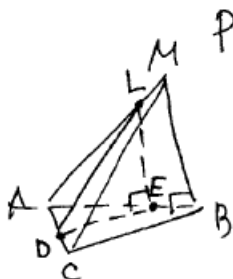
рассмотрим $\triangle MAB$: $AB = 3$, $\angle B = 90^\circ$, $MA = 6$. т.к. катет лежащий
 напротив угла равного 30° равен половине гипотенузы $\Rightarrow \angle AMB = 30^\circ$
 $\Rightarrow \angle MAB = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Ответ: 60°

Оценка: 0 баллов

- неверное использование признаков перпендикулярности и параллельности прямых, плоскостей

Пример 17:



Решение.

$$1) LM = 1; EB = 1, LE \parallel MB$$

$$AC = 3; AD = 2; \text{тогда } DC = 3 - 2 = 1.$$

$$DC = 1; EB = 1, DE \parallel CB.$$

$$LM = 1; DC = 1; LD \parallel MC.$$

~~$\triangle LDE$~~ $(DLE) \parallel (CMB)$, тогда если $(CMB) \perp (ABC)$, то и
 $(LED) \perp (ABC)$, следовательно $(ABC) \wedge (ELD) = 90^\circ$.

Ответ: 90° .

Оценка: 0 баллов

Пример 18:

С₂ введем прямоугольную систему координат x, y, z .

Найдем координаты некоторых точек

$$B(0;0;0), A(3;0;0), C(1,5; 1,5\sqrt{3}; 0), E(1;0;0) \quad \overset{L}{(2;0;\sqrt{3})}, D(2;\sqrt{3};0)$$

$$\vec{BA} \{3;0;0\}, \vec{BC} \{1,5; 1,5\sqrt{3}; 0\}, \vec{EL} \{1;0;\sqrt{3}\}, \vec{ED} \{1;\sqrt{3};0\}$$

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{|\vec{BA} \cdot \vec{BC}|}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 1,5 & 1,5\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + \frac{9}{2}\vec{k}$$

$$x_1 = 0 \quad y_1 = 0 \quad z_1 = \frac{9}{2}\sqrt{3}$$

$$\vec{n}_2 = |\vec{EL} \cdot \vec{ED}|$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}$$

$$x_2 = -3 \quad y_2 = \sqrt{3} \quad z_2 = \sqrt{3}$$

$$\cos(\angle \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$\cos(\angle \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{0 \cdot (-3) + 0 \cdot \sqrt{3} + \frac{9}{2} \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{0+0+\frac{243}{4}} \cdot \sqrt{9+3+3}} = \frac{27 \cdot 3}{2 \cdot 9 \sqrt{3} \cdot \sqrt{15}} =$$

$$= \frac{27}{2 \cdot 3 \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos(\angle ABC)(DEL) = 180 - \arccos(\angle \vec{n}_1, \vec{n}_2) = 180 - \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Ответ: } \cos(\angle ABC)(DEL) = 180 - \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Оценка: 1 балл. Это пример работы, где при решении используются элементы векторной геометрии.

- неверное определение координат точек A, B, C, E, D и L при использовании координатного метода решения;
- ошибки вычислительного характера;

С3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x + 7 \cdot 2^{-x} \geq 8, \\ 2 \log_{(x^2-6x+10)^2} (5x^2+3) \leq \log_{x^2-6x+10} (4x^2+7x+3). \end{cases}$$

Решение:

1. Решим первое неравенство системы: $2^x + 7 \cdot 2^{-x} \geq 8$.

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t + \frac{7}{t} \geq 8; \frac{(t-1)(t-7)}{t} \geq 0,$$

откуда $0 < t \leq 1$ или $t \geq 7$.

При $0 < t \leq 1$ получаем: $0 < 2^x \leq 1$, откуда $x \leq 0$.

При $t \geq 7$ получаем: $2^x \geq 7$, откуда $x \geq \log_2 7$.

Решение первого неравенства исходной системы: $x \leq 0$; $x \geq \log_2 7$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\begin{aligned} 2 \log_{(x^2-6x+10)^2} (5x^2+3) &\leq \log_{x^2-6x+10} (4x^2+7x+3); \\ \log_{(x-3)^2+1} (5x^2+3) &\leq \log_{(x-3)^2+1} (4x^2+7x+3); \\ \begin{cases} x \neq 3, \\ 5x^2+3 \leq 4x^2+7x+3; \end{cases} &\begin{cases} x \neq 3, \\ x(x-7) \leq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

откуда $0 \leq x < 3$ или $3 < x \leq 7$.

Решение второго неравенства исходной системы: $0 \leq x < 3$; $3 < x \leq 7$.

3. Поскольку $0 < \log_2 7 < 3$, получаем решение исходной системы неравенств: $x = 0$; $\log_2 7 \leq x < 3$; $3 < x \leq 7$.

Ответ: 0 ; $[\log_2 7; 3)$; $(3; 7]$.

Рассмотрим еще один способ решения логарифмического неравенства

$\log_{x^2-6x+10} (5x^2+3) \leq \log_{x^2-6x+10} (4x^2+7x+3)$ — используя «метод рационализации», который решение логарифмического неравенства вида

$$\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$$

сводит к эквивалентной системе неравенств:

$$\begin{cases} (a-1)(f(x)-g(x)) \leq 0, \\ a > 0, \\ a \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$$

четыре из которых, в приведенной системе соответствуют области определения логарифмических функций и обязательно должны присутствовать при переходе от логарифмического неравенства к рациональному.

2) $2 \log_{x^2-6x+10}(5x^2+3) \leq \log_{x^2-6x+10}(4x^2+4x+3)$
 $\log_{x^2-6x+10}(5x^2+3) - \log_{x^2-6x+10}(4x^2+4x+3) \leq 0$
 по методу рационализации

$$\begin{cases} (x^2-6x+10-1)(5x^2+3-4x^2-4x-3) \leq 0 \\ x^2-6x+10 > 0 \\ x^2-6x+10 \neq 1 \\ -4x^2+4x+3 > 0 \end{cases} \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x \in \mathbb{R} \\ x \neq 3 \\ x < -1, x > -0,45 \end{cases}$$

$(x^2-6x+10-1)(5x^2+3-4x^2-4x-3) \leq 0$
 $(x-3)^2(x^2-4x) \leq 0$
 $(x-3)^2(x^2-4x) = 0$
 $x=3 \quad x=0 \quad x=4$

$-4x^2+4x+3 > 0$
 $-4x^2+4x+3=0$
 $D = 49-48=1$
 $x_1 = -1$
 $x_2 = -0,45$

Решение второго неравенства
 $x \in [0; 3) \cup (3; 4]$

Согласно критериям оценивания задания С3 в этом году при наличии вычислительных ошибок, но верном выполнении всей последовательности шагов решения за задание можно было получить балл:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Что не было предусмотрено в критериях 2013 года:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С этим заданием справилось 19,3% всех обучающихся (на 7,7% больше, чем в прошлом году), причем по баллам получили соответственно:

Задание СЗ	0 баллов	1 балл	2 балла	3 балла
Кол-во обучающихся (в %)	80,7	12,34	2,24	4,72

Основные ошибки были в следующем:

- неучет ОДЗ логарифмической функции и необоснованность перехода от логарифмического неравенства к рациональному (неучет переменности основания логарифма)

Пример 19:

$$\begin{aligned}
 & 2. \quad 2 \log_{(x^2-6x+10)^2} (5x^2+3) \leq \log_{x^2-6x+10} (4x^2+4x+3); \\
 & \log_{x^2-6x+10} (5x^2+3) \leq \log_{x^2-6x+10} (4x^2+4x+3); \\
 & 5x^2+3 \leq 4x^2+4x+3; \quad x^2-4x \leq 0; \quad x^2-4x=0; \quad x(x-4)=0, \\
 & \begin{array}{c} \text{+} \quad \text{---} \quad \text{+} \\ \text{0} \quad \quad \text{4} \quad \text{---} \quad \text{x} \end{array} \quad \begin{array}{l} x=0 \text{ или } x=4. \\ x \in [0; 4]. \end{array}
 \end{aligned}$$

Оценка: 0 баллов

- неверное определение значений, которые может принимать основание логарифмической функции (в рассматриваемом задании основание логарифма всегда больше единицы)

Пример 20:

$$2) 2 \log_{(x^2-4x+5)^2} (4x^2+1) \leq \log_{x^2-4x+5} (3x^2+4x+1)$$

$$\log_{x^2-4x+5} (4x^2+1) \leq \log_{x^2-4x+5} (3x^2+4x+1)$$

Рассмотрим 2 случая:

$$1) \begin{cases} x^2-4x+5 > 1 \\ 4x^2+1 \leq 3x^2+4x+1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2-4x+5 < 1 \\ 4x^2+1 \geq 3x^2+4x+1 \end{cases}$$

$$4x^2+1-3x^2-4x-1 \leq 0$$

$$x^2-4x \leq 0$$

$$x(x-4) \leq 0$$



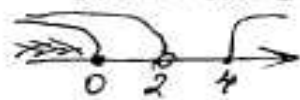
$$x(x-4) \geq 0$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x(x-4) \leq 0 \end{cases}$$



$$x \in (2; 4]$$

$$\begin{cases} x < 2 \\ x(x-4) \geq 0 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; 0)$$

Оценка: 0 баллов

- неверное определение пересечения решений каждого из неравенств системы (потеря точки)

Пример 21:

$$\begin{cases} 2^x + 7 \cdot 2^{-x} \geq 8, \\ 2 \log_{(x^2-6x+10)} (5x^2+3) \leq \log_{x^2-6x+10} (4x^2+7x+3); \end{cases}$$

О.Д.З.: $\begin{cases} x^2-6x+10 > 0, x \in \mathbb{R} \\ x^2-6x+10 \neq 1, x \neq 3 \\ (5x^2+3 > 0, x \in \mathbb{R}) \\ 4x^2+7x+3 > 0; \end{cases}$ О.Д.З.: $x \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{3}{4}; 3) \cup (3; +\infty)$

1) Решим первое неравенство

$$2^x + 7 \cdot 2^{-x} \geq 8; \quad 2^x = t; \quad t > 0;$$

$$t + \frac{7}{t} \geq 8; \quad t^2 - 8t + 7 \geq 0; \quad t_1 = 1; \quad t_2 = 7;$$

методом $\begin{matrix} - & + \\ 1 & 7 \end{matrix}$ $\begin{cases} t \leq 1, \\ t \geq 7; \end{cases}$ $x \in (-\infty; 0] \cup [\log_2 7; +\infty);$

2) Решим второе неравенство

$$2 \log_{(x^2-6x+10)} (5x^2+3) \leq \log_{x^2-6x+10} (4x^2+7x+3);$$

$$\log_{x^2-6x+10} (5x^2+3) \leq \log_{x^2-6x+10} (4x^2+7x+3);$$

При $x \neq 3$ (это предположено в О.Д.З.) $x^2-6x+10 > 1$ при всех допустимых значениях x , тогда

$$5x^2+3 \leq 4x^2+7x+3;$$

$$x^2 - 7x \leq 0; \quad x(x-7) \leq 0; \quad \begin{matrix} + & - & + \\ 0 & 7 \end{matrix}$$

$x \in [0; 7]$ объединим решения двух неравенств в систему и утв. О.Д.З. тогда $x \in [\log_2 7; 3) \cup (3; 7];$

Ответ: $[\log_2 7; 3) \cup (3; 7].$

Оценка: 2 балла

- невыполнение обратной замены (получение промежутков изменения «новой» переменной, а не заданной x)

Пример 22:

$$\begin{aligned}
 2^x + 9 \cdot 2^{-x} &\geq 10 \\
 2^x &= t \\
 t + 9 \cdot \frac{1}{t} &\geq 10 \quad | \cdot t \\
 t^2 + 9 - 10t &\geq 0 \\
 D &= 100 - 36 = 64 = 8^2 \\
 x_{1,2} &= \frac{10 \pm 8}{2} \\
 x_1 &= 9 \\
 x_2 &= 1 \\
 \text{---} & \quad \quad \quad \text{---} \\
 & \quad \quad \quad x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)
 \end{aligned}$$

Оценка: 0 баллов

- неверное решение рациональных неравенств:

Пример 23:

$$\begin{aligned}
 \log_{x^2-6x+10} (5x^2+3) &\leq \log_{x^2-6x+10} (4x^2+7x+3) \\
 5x^2+3 &\leq 4x^2+7x+3 \\
 5x^2+3-4x^2-7x-3 &\leq 0 \\
 x^2-7x &\leq 0 \\
 x \cdot (x-7) &\leq 0 \\
 \underline{x \leq 0} \quad \quad \quad \underline{x-7 \leq 0} \\
 & \quad \quad \quad \underline{x \leq 7} \\
 2. \quad \text{---} & \quad \quad \quad x \in (-\infty; 0]
 \end{aligned}$$

Оценка: 0 баллов

- изменение строгости решаемого неравенства

Пример 24:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & 2^x + 7 \cdot 2^{-x} \geq 8 \quad 2^x = t; \quad t + \frac{7}{t} - 8 \geq 0 \quad t_1, t_2 = 7 \\
 & \frac{t^2 - 8t + 7}{t} \geq 0 \quad t \neq 0 \quad \frac{(t-1)(t-7)}{t} \geq 0 \quad t_1 = 7, t_2 = 1 \\
 & \underline{0 < t < 1} \quad \text{и} \quad 7 \leq t < +\infty \\
 & 0 < 2^x < 1 \quad 7 \leq 2^x < +\infty \\
 & x < \log_2 1 \quad x \geq \log_2 7 \\
 & x \in (-\infty; 0) \cup [\log_2 7; +\infty)
 \end{aligned}$$

Оценка: 0 баллов

- вычислительные ошибки.

С4. Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.

б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 2 и 18.

Доказательство: а)

1 способ. Основан на доказательстве того, что четырехугольник OCO_1D является прямоугольником (тогда его диагонали OO_1 и CD равны).

а) Пусть O — центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC , O_1 — центр окружности, касающейся большей боковой стороны и продолжений оснований трапеции (рис. 1).

Точка O лежит на биссектрисах углов BCD и ADC , следовательно,

$$\angle COD = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle BCD - \frac{1}{2} \angle ADC = 90^\circ.$$

Точка O_1 лежит на биссектрисе угла, смежного с углом BCD , значит, $\angle COO_1 = 90^\circ$. Аналогично, углы CO_1D и ODO_1 — прямые.

Значит, OCO_1D — прямоугольник, поэтому $CD = OO_1$.

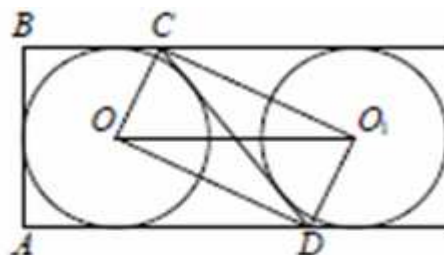
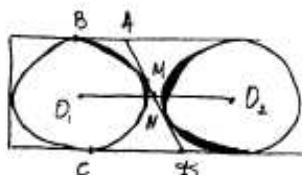


Рис. 1

2 способ. Отрезки OO_1 и CD точкой пересечения разбиваются на части. Значит нужно доказать, что получающиеся суммы длин частей равны. В этом случае при доказательстве используются свойства касательных, проведенных из одной точки к окружности. Ниже приведены сканы реальных работ, в которых реализован именно этот способ (в работах используются различные свойства касательных)

С₄.



Доказать: $AD = O_1O_2$

$BA = AM$ (по свойствам касательных)

$MD = BC$ (—||—)

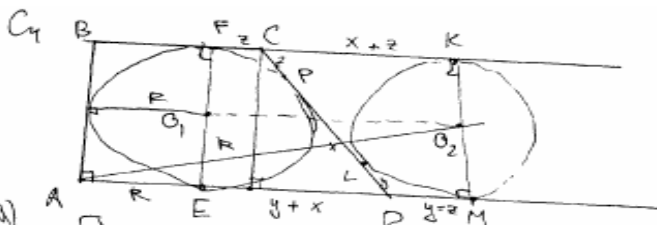
$AD = AM + MD = BA + CD$

$O_1N = O_2N = \frac{BA + CD}{2}$ (по свойствам середин или же теореме)

$O_1N + O_2N = \frac{BA + CD}{2} \cdot 2 = BA + CD = O_1O_2$

$O_1O_2 = AD$ т.т.р.

Замечание: в этих рассуждениях учтена (но не отмечена) симметрия, из которой вытекает $NO_2 = NO_1$.



Дано: $ABCD$ — трапеция

$\angle A = 90^\circ$

$CP = 2$

$PD = 18$

Доказать:

1) По св-ву касательной, проведенной из одной точки $ED = DP$, $FC = CP = 2$.

2) $OK \perp BC$ и $O_2M \perp AD$ как радиусы, т.к. $CL = CK$, $DL = DM = y$.

$BC \parallel AD$ т.к. $O_2 \in KM$ и $KM = FE = AB$; $KM \perp AD$.

3) $EFGM$ — прямоугольник, т.к. $EF = KM$, $EF \perp AD$, $EF \perp BC$. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow O_1O_2 = EM = FK$, $EM = y + y + x = 2y + x$; $FK = 2 + x + 2 = x + 4$
 $2y + x = x + 4$
 $y = 2$.

4) $CD = CP + PL + LD = 2 + x + y = 2y + x = EM = O_1O_2$. т.т.р.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>b</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

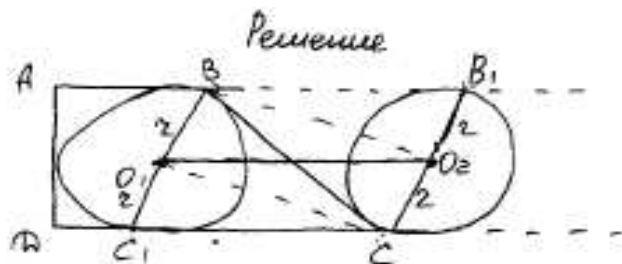
С этим заданием справилось 1,5% всех обучающиеся, причем по баллам получили соответственно:

Задание С4	0 баллов	1 балл	2 балла	3 балла
Кол-во обучающиеся (в %)	98,5	0,88	0,16	0,46

Основные ошибки были в следующем:

- неверное понимание условия задачи;
- незнание признаков (или определения) прямоугольника;
- неверное использование свойств касательных;
- вычислительные ошибки.

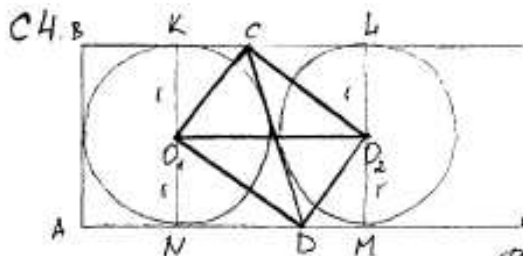
Пример 25:



1. BC и CC_1 - касательные к окр. с O_1 , они равны ($BO_1 = O_1C_1$ (радиусы), O_1C - общ. $\Rightarrow$ эти прям. ΔCO_1B и ΔCO_1C_1 - равны по 2-м сторонам) $\Rightarrow$
2. BC и BB_1 - касат. к окр. с O_2 , они равны аналогично п.1.
- $\Rightarrow BB_1 = CC_1, BC_1 = B_1C \Rightarrow BB_1CC_1$ - параллелограмм.
3. O_1O_2 - сред. линия BB_1, CC_1 ($BO_1 = O_1C_1, B_1O_2 = O_2C$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow O_1O_2 = BB_1 = CC_1$, но т.к. $BB_1 = CC_1 = BC \Rightarrow O_1O_2 = BC$.

Оценка: 0 баллов. Неверен рисунок – т.В не является точкой касания окружности. Также непонятно утверждение о равенстве стороны параллелограмма и его диагонали.

Пример 26:



Дано: $ABCD$ - прямоугольная трапеция
 $AB \perp AD, AB \perp BC$

Окр. $(O_1; r), (O_2; r)$

а) Доказать: $O_1O_2 = CD$.

Решение.

- 1) ΔKCO_1 и ΔMDO_2
 $KO_1 = O_2M = r$
 $KC = MD$ (из четырехугольника $KLMN$ $LK = MN, KC = KL - CL$,
 $MD = MN - DN$)
 $\Delta KCO_1 = \Delta MDO_2$
- 2) $\Delta CL'O_2 = \Delta DNO_1$ аналогично
 Сл.но, $CO_1 = DO_2, DO_1 = CO_2$
 CO_2DO_1 - прямоугольник
 В прямоугольнике диагонали равны, значит, $CD = O_1O_2$

Оценка: 0 баллов. Не ясно, почему из равенства противоположных сторон четырехугольника следует, что он является прямоугольником

Пример 27:

СЧ

Дано: $ABCD$ - трапеция
 $\angle BAC = \angle ACD = 90^\circ$
 окр. $(O; r)$
 окр. $(O_1; r_1)$
 Д-ть: $BD = OO_1$
 Найти: AQ

Решение:

г.п. $OB; BO_1; QD; OD$
 $\angle ABD = \angle BDT$ накрест лежащие
 $MTN \parallel LT$ диаметры окр. касающ. $\parallel$ прямых
 OQ - секущая
 $OB \parallel O_1D \Rightarrow ODO_1B$ - прямоугольник
 $OB \parallel O_1B$
 $BO_1 \parallel OB$

Оценка: 0 баллов. Выпускник не знает определения прямоугольника – из параллельности противоположных сторон делает вывод о перпендикулярности

Пример 28:

СЧ

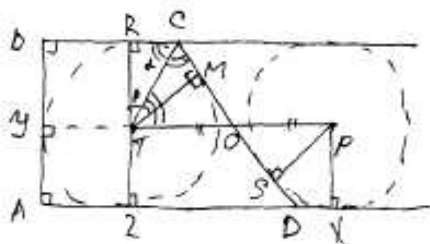
Дано: $ABCD$ - прямоугольник, $(O_1; r_1)$ - впис. окр.
 M, E - точки касания впис. окр. (O_2, r_2) с BC и CD
 Д-ть: $O_1O_2 = CD$
 Найти: AO_2

Решение.

Д-ть: $O_1O_2 = CD$
 П.п. 2-х $(O; r)$ касается продолжений смежных, то $r_1 = r_2$. Проведем радиусы, так что $O_1M \perp AD$ и $O_2N \perp BC \Rightarrow O_1MNO_2$ - прямоугольник. $\Rightarrow O_1M = O_2N$. П.п. O_1O_2 - диагональ прямоугольника M, N, P, Q , то $CE = CD = O_1M = O_2N$. Следовательно, $O_1O_2 = CD$.

Оценка: 0 баллов. Сделанные выводы неверны – у прямоугольника не всегда равны отрезки, соединяющие смежные вершины с некоторой точкой на противоположной стороне.

Пример 29:



Дано: прямоугольная трапеция, $AB \parallel CD$, с высотой BC и AD .

2-76: a) $TP = CD$

Найти: δ , $p(A; P)$, $CM=2$, $MD=18$.

а) $\angle O = 90^\circ$, т.к. в $\triangle MO$: $TM \perp CD$, центр радиуса в точку касания.
 в $\triangle OSP$: $PS \perp CD$, центр радиуса в точку касания.
 радиусы окружностей равны т.к. они заштрихованы
 между параллельными BC и AD (ангелии тран)
 $\angle COT \angle POS$, они вертикальные тогда $\sim$ пара
 углов стрелочек вверх в параллельн. Треугольники
 равны, тогда $\angle TOM = \angle OSP$ - по центру и стороне углу.
 $OT = OS$ $TP \parallel AD$, т.к. $TZ \perp PX$ тогда по $\angle$ обратен $\angle$
 пропорциональности отрезков $CO = OD$, а т.к. $MO = OS$, из
 равенства треугольников $\triangle TOC \triangle OPS$, $CM = PD$.

По св. 2 касательных из одной точки к окружности.
 $PC = CM$ $TP = TM$

$$RC=CM, TR=TM, \angle TCM = \angle TCR, \angle RTC = \angle CTM. \alpha + \beta = 90^\circ$$

$\angle PTO = 90^\circ$, $\therefore \angle P \parallel BC$, $AT \perp BC$, $\therefore$ Tangent $RT \perp TO$.

$$\angle RTO - \angle RTC = 90^\circ - \beta = \angle, \text{ since } \angle CTO = \angle TCO = \angle, \text{ since}$$

• OCT-равноб, тогда $PO = CO$, тогда $OP = OP$, тогда

$$CO + OD = TO + OP \rightarrow CD = TP$$

2.5.9.

д) из условия $CM=2$, $MD=18$, тогда $CD=20$, тогда $CO=OD=\frac{CD}{2}=10$.

$DP = AP$, $GA = r$, $GP = r$, $TP = CD = 20$, $CO = 10$, $CM = 2$, $\angle GMP = 90^\circ$,
 $PM = \sqrt{100 - 64} = 6$

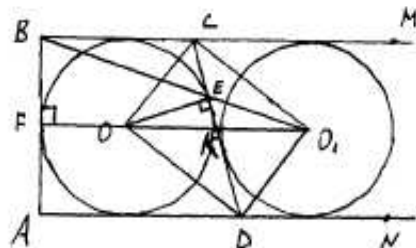
range $3A=6$ $3P=37+7P=6+20=26$, range no. 1. Punkt:

$$\sqrt{36 + 676} = \sqrt{712} = 16\sqrt{2} = AP$$

Answer: $16\sqrt{2}$

Оценка: 2 балла. Первая часть задачи выполнена верно. При нахождении искомого расстояния по теореме Пифагора подкоренная сумма выписана правильно, в результат – нет. Вычислительная ошибка привела к снижению оценки на 1 балл.

Пример 30:



K - точка пересечения CD и OO_1 ;

а) т.к. DA и DC - касательные, проведенные из одной точки к окружности с центром в т. O , то $\angle ADO = \angle CDO$, т.е. $\angle ADC = 2\angle CDO$;

аналогично $\angle BCO = \angle DCO$, т.е.

$\angle BCD = 2\angle DCO$; $\angle BCD + \angle ADC = 180^\circ$ как сумма односторонних углов при $BC \parallel AD$ и секущей CD , т.е.

$2\angle DCO + 2\angle CDO = 180^\circ$, следовательно $\angle DCO + \angle CDO = 90^\circ$,

тогда в $\triangle OCD$ $\angle O = 90^\circ$; аналогично в $\triangle O_1CD$ $\angle O_1 = 90^\circ$;

т.к. $\angle O + \angle O_1 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, то вокруг четырехугольника $DOCO_1$ можно описать окружность и CD является ее

диаметром; $\angle ADC + \angle CDN = 180^\circ$ как сумма двух смежных углов, т.к. $\angle ADC = 2\angle CDO$, а $\angle CDN = 2\angle CDO_1$,

то $2\angle CDO + 2\angle CDO_1 = 180^\circ$, т.е. $\angle CDO + \angle CDO_1 = 90^\circ = \angle ODO_1$,

следовательно OO_1 - диаметр окружности, описанной около четырехугольника $DOCO_1$, а значит $OO_1 = CD$, что и требовалось доказать.

б) $R(B; O_1) = BO_1$; $CE = 2$; $ED = 18$; $CD = 2 + 18 = 20$;

$CK = KD = OK = KO_1 = \frac{CD}{2} = \frac{20}{2} = 10$; то $EK = CK - CE = 10 - 2 = 8$;

$\triangle DEK$: $\angle E = 90^\circ$ (OE - радиус, проведенный в т. касания),

по т. Пифагора $OE = \sqrt{OK^2 - EK^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$; $FO = OE = 6$;

тогда $FO_1 = OO_1 + FO = 20 + 6 = 26$; $BF = OE = 6$; $\triangle FBO_1$: по

т. Пифагора: $BO_1 = \sqrt{26^2 + 6^2} = \sqrt{712}$.

Ответ: $\sqrt{712}$

Оценка: 3 балла.

C5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $((a-1)x^2 + 3x)^2 - 2((a-1)x^2 + 3x) + 1 - a^2 = 0$ имеет ровно два решения.

Обычно задача с параметром, предлагаемая в выпускной работе, может быть решена различными методами: аналитическим; графическим; основанным на анализе функций, входящих в уравнение. Из-за этого задания С5 особенно сложны для проверки согласно критериям, написанным под «авторское» решение задачи. В этом году было предложено уравнение с параметром, для анализа которого явно «просилось» сведение данного уравнения к квадратному уравнению и дальнейшее исследование полученного уравнения второй степени.

Решение:

Пусть $t = (a-1)x^2 + 3x$, тогда уравнение запишется в виде $t^2 - 2t + 1 - a^2 = 0$, откуда $t = a+1$ или $t = 1-a$. Значит, решения исходного уравнения — это решения уравнений $(a-1)x^2 + 3x = a+1$ или $(a-1)x^2 + 3x = 1-a$.

Исследуем, сколько решений имеет уравнение $(a-1)x^2 + 3x = b$ в зависимости от a и b . При $a \neq 1$ уравнение принимает вид $(a-1)x^2 + 3x - b = 0$. Это квадратное уравнение, дискриминант которого равен $9 + 4(a-1)b$. Таким образом, уравнение $(a-1)x^2 + 3x = b$ имеет два решения при $(a-1)b > -\frac{9}{4}$, одно решение при $(a-1)b = -\frac{9}{4}$ и не имеет решений при $(a-1)b < -\frac{9}{4}$. При $a = 1$ уравнение принимает вид $3x = b$ и имеет одно решение.

Уравнения $(a-1)x^2 + 3x = a+1$ и $(a-1)x^2 + 3x = 1-a$ могут иметь общие решения при $a+1 = 1-a$, то есть при $a = 0$. При $a = 0$ оба уравнения принимают вид $-x^2 + 3x = 1$ и имеют два решения.

При других значениях a исходное уравнение имеет ровно два решения, если либо оба уравнения $(a-1)x^2 + 3x = a+1$ и $(a-1)x^2 + 3x = 1-a$ имеют по одному решению, либо одно из них не имеет решений, а другое имеет два решения. При $a = 1$ каждое из этих уравнений имеет единственное решение и эти решения различны. При других значениях a выполнено неравенство $a^2 - 1 > -\frac{9}{4}$, поэтому уравнение $(a-1)x^2 + 3x = a+1$ имеет два решения.

Уравнение $(a-1)x^2 + 3x = 1-a$ не имеет решений при $(a-1)^2 > \frac{9}{4}$, то есть при $a < -\frac{1}{2}$ и при $a > \frac{5}{2}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения при $a < -\frac{1}{2}$; $a = 0$; $a = 1$; $a > \frac{5}{2}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$; 0 ; 1 ; $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением точек $a = -0,5$ и/или $a = 2,5$	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений a : $(-\infty; -0,5)$ или $(2,5; +\infty)$, возможно, с включением граничных точек	2
Верно найдено хотя бы одно из значений a : $a = 0$ или $a = 1$; ИЛИ верно найдена хотя бы одна из граничных точек множества значений a : $a = -0,5$ или $a = 2,5$; ИЛИ получено хотя бы одно из уравнений $(a-1)x^2 + 3x = a+1$ или $(a-1)x^2 + 3x = 1-a$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С этим заданием справилось 4,1% всех обучающихся, причем по баллам получили соответственно:

Задание С5	0 баллов	1 балл	2 балла	3 балла	4 балла
Кол-во обучающихся (в %)	95,9	3,51	0,24	0,17	0,18

Основные ошибки были в следующем:

- неполное обоснование выводов;
- неверное вычисление дискриминанта полученного квадратного уравнения, содержащего параметр;
- безыдейный перебор некоторых значений параметра, при которых, возможно, будет выполнено условие задачи.

Пример 31:

$$C5 \quad ((a-1)x^2 + 3x)^2 - 2((a-1)x^2 + 3x) + 1 - a^2 = 0$$

Пусть $((a-1)x^2 + 3x) = t$

$$t^2 - 2t + 1 - a^2 = 0$$

$$D_1 = 1 + a^2 - 1 = a^2, \text{ так } a^2 \geq 0 \text{ то квадратное уравнение имеет 1 или 2}$$

корни

Если $a = 0$

$$-x^2 + 3x = 1 \quad x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$D = 9 - 4 = 5, \text{ так } D > 0 \text{ - уравнение имеет 2 корня}$$

Если $a \neq 0$

$$t = 1 \pm a$$

$$(a-1)x^2 + 3x = 1 + a \quad \text{или} \quad (a-1)x^2 + 3x = 1 - a$$

$$D = 9 - 4(a-1)(1-a) =$$

$$= 9 + 4(a^2 - 1) = 4a^2 + 5 > 0$$

$D > 0$ значит уравнение всегда имеет 2 решения

Если $a = 1$

$$9x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \text{или} \quad 0x^2 + 3x + 1 - 1 = 0$$

$$(3x - 1)^2 = 0 \quad 3x = 0$$

$$x = \frac{1}{3} \quad x = 0$$



$$a \in (-0.5, 2.5) \cup a = 0, 1$$

$$(a-1)x^2 + 3x - 1 - a = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{4a^2 + 5}}{2(a-1)}$$

$$\frac{-3 + \sqrt{4a^2 + 5}}{2(a-1)} = \frac{-3 + \sqrt{9 - 4(a-1)^2}}{2(a-1)}$$

$$\sqrt{4a^2 + 5} = \sqrt{9 - 4(a-1)^2}$$

$$4a^2 + 5 = 9 - 4(a^2 - 2a + 1)$$

$$8a^2 - 8a = 0$$

$$a^2 - a = 0$$

$$a(a-1) = 0$$

$$a = 0 \text{ или } a = 1$$

$$(a-1)x^2 + 3x + a - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(a-1)^2}}{2(a-1)}$$

$$\frac{-3 + \sqrt{4a^2 + 5}}{2(a-1)} = \frac{-3 - \sqrt{9 - 4(a-1)^2}}{2(a-1)}$$

$$\sqrt{4a^2 + 5} = -\sqrt{9 - 4(a-1)^2}$$

р нет

$$\frac{-3 - \sqrt{4a^2 + 5}}{2(a-1)} = \frac{-3 + \sqrt{9 - 4(a-1)^2}}{2(a-1)}$$

$$-\sqrt{4a^2 + 5} = \sqrt{9 - 4(a-1)^2} \text{ - реш нет}$$

$$\frac{-3 - \sqrt{4a^2 + 5}}{2(a-1)} = \frac{-3 - \sqrt{9 - 4(a-1)^2}}{2(a-1)}$$

$$\sqrt{4a^2 + 5} = \sqrt{9 - 4(a-1)^2}$$

$$a = 0 \text{ или } a = 1$$

На промежутке $(-0.5, 2.5)$ и $a \neq 0, 1$ совпадающих корней нет

Ответ при $a \in (-\infty, -0.5) \cup (2.5, +\infty) \cup \{0, 1\}$ - уравнение

Оценка: 4 балла.

Пример 32:

C5) Найти все значения a , при которых уравнение

$$((a-1)x^2 + 3x)^2 - 2((a-1)x^2 + 3x) + 1 - a^2 = 0$$

 имеет ровно два решения.
 для того, чтобы уравнение имело два решения оно
 должно быть квадратным, этому условию соответствует $a=1$.
 $a=1$.
Проверка.
 $3x^2 - 6x + 1 - 1 = 0$
 $3x^2 - 6x = 0$
 $x(3x - 6) = 0$
 $x=0$ или $3x-6=0$
 $3x=6$
 $x=2$.
 Ответ. $a=1$.

Оценка: 1 балл. Верно найдено (и проверено) одно из требуемых значений параметра

Пример 33:

C5) а) 2 реш

$$((a-1)x^2 + 3x)^2 - 2((a-1)x^2 + 3x) + 1 - a^2 = 0$$

 Пусть $t = ((a-1)x^2 + 3x)$
 $t^2 - 2t + 1 - a^2 = 0$
 кв ур-ние имеет 2 реш при $D > 0$
 $D = 1 - 1 + a^2 = a^2$, т.е. $a \neq 0$
 $t_1 = 1 - a$; $t_2 = 1 + a$

$$\begin{cases} 1 - a = ((a-1)x^2 + 3x) \\ a + 1 = ((a-1)x^2 + 3x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)x^2 + 3x + a - 1 = 0 \\ (a-1)x^2 + 3x - (a+1) = 0 \end{cases}$$

 Получим сист. в которой для наших усл. должно быть 6
 корней. Т.е. у каждого по 1 ($D_{1,2}=0$) или по 2 ($D_{1,2}>0$ или $D_{1,2}<0$)
 1) по 1 корню, $D_{1,2}=0$
 $D_1 = 9 - 4(a-1)(a-1) = 0$
 $\frac{9}{4} = (a-1)^2$; $a-1 = \pm \frac{3}{2}$; $a = \frac{5}{2}$; $-\frac{1}{2}$
 $D_2 = 9 + 4(a-1)(a+1) = 0$
 $9 + 4(a^2 - 1) = 0$
 $a^2 = -\frac{5}{4}$; $\Rightarrow a \in \emptyset$
 2) $\begin{cases} D_1 > 0 \\ D_2 < 0 \\ D_1 < 0 \\ D_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4(a-1)^2 > 0 \\ 9 + 4(a^2 - 1) < 0 \\ 9 - 4(a-1)^2 < 0 \\ 9 + 4(a^2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \\ a \in \emptyset \\ a \in (-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}) \\ a \in (-\infty, \infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (\frac{5}{2}, \infty)$
 Ответ: $a \in (\frac{5}{2}, \infty)$.

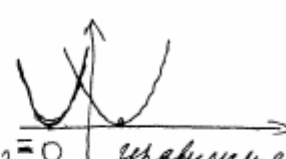
Оценка: 2 балла. Здоровые рассуждения. Верно найден один из промежутков изменения параметра. Ошибка при рассмотрении второго случая в решении первого неравенства любой из систем.

Пример 34:

С5. $((a-1)x^2 + 3x)^2 - 2((a-1)x^2 + 3x) + 1 - a^2 = 0$
 Пусть $t = (a-1)x^2 + 3x$
 $t^2 - 2t + 1 - a^2 = 0$
 $t = 1+a; t = 1-a$
 $(a-1)x^2 + 3x = a+1; (a-1)x^2 + 3x = 1-a$
 $(a-1)x^2 + 3x - (a+1) = 0; (a-1)x^2 + 3x - (1-a) = 0$
 $D = 9 + 4a^2 - 1 = 4(a^2 + 2); D = -4a^2 + 8a + 9$
 Дискриминант должен быть больше нуля,
 чтобы было 2 решения.
 $4(a^2 + 2) > 0; -4a^2 + 8a + 9 > 0 \quad | (-1)$
 $a^2 + 2 > 0; 4a^2 - 8a - 9 < 0$
 $a^2 > -2; 4(a+0,5)(a-2,5) < 0 \quad | :4$
 $a \in (-\infty; \infty); \frac{+}{-0,5} \frac{+}{2,5}$
 Ответ: При $a \in (-0,5; 2,5)$ уравнение будет
 иметь ровно 2 решения.

Оценка: 1 балл. Верно получены квадратные уравнения. Но для каждого уравнения дискриминант выписан неправильно

Пример 35:

С5. Сделаем замену: $((a+2)x^2 - 5x) = t$.
 Рассмотрим график $y_1 = (a+2)x^2 - 5x$: 
 $x_0 = \frac{5}{a+2}, a \neq -2; y_0 = \frac{(a+2) \cdot 25}{(a+2)^2} - \frac{25}{a+2} = 0$ уравнение.
 При любом x и при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ у ~~уравнения~~ y_1 только
 1 корень. Значит, необходимо, чтобы у уравнения, полученного
 после замены, было 2 решения:
 $t^2 + 4t + 4 - a^2 = 0, \Delta > 0$.
 $\Delta = 16 - 4(4 - a^2) = a^2, a^2 > 0 \Rightarrow a \neq 0$.
 Ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$.

Оценка: 0 баллов. Попытка решить задачу, используя графические соображения. Но координаты вершины параболы (y_0) найдены неверно.

Пример 36:

Данное уравнение является квадратным. Оно будет иметь два корня, если дискриминант будет больше нуля.

$$((a+2)x^2 - 5x)^2 + 4((a+2)x^2 - 5x) + 4 - a^2 = 0$$

$$D = 16 - 4(4 - a^2)$$

$$16 - 4(4 - a^2) > 0$$

$$16 - 16 + 4a^2 > 0$$

$$4a^2 > 0 \quad | :4$$

$$a^2 > 0$$

$a^2 > 0$ при любых a кроме $a = 0$

Значит, при $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ данное уравнение будет иметь 2 корня.

Оценка: 0 баллов. Неверен вывод о степени заданного уравнения.

С6. На сайте проводится опрос, кого из 152 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 16 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 31. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста?

б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться не менее чем на 32?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?

Решение:

а) Если рейтинг футболиста на сайте равен 31, то доля голосов, отданных за него, находится в границах от 0,305 до 0,315. Поскольку всего проголосовало 16 посетителей сайта, получаем, что количество голосов, отданных за этого футболиста, не меньше $16 \cdot 0,305 = 4,88$, но меньше $16 \cdot 0,315 = 5,04$, то есть

равно 5. После того, как Вася проголосовал, доля голосов за первого футболиста стала равна $5/17 = 0,294$. Значит, его рейтинг стал равен 29.

б) Пусть за 151 футболиста было отдано по одному голосу, а за оставшегося — 49. В этом случае 151 футболист имеет рейтинг 1, а последний — 25; сумма рейтингов равна 176. Если Вася отдаст свой голос за последнего футболиста, то его рейтинг останется равным 25, а рейтинги всех остальных футболистов станут равны 0. В этом случае сумма рейтингов станет равна 25, то есть уменьшится на 151.

в) Заметим, что для каждого из 152 футболистов доля отданных за него голосов, выраженная в процентах, отличается от рейтинга не более чем на 0,5. Поэтому сумма рейтингов всех футболистов отличается от 100 не более чем на $0,5 \cdot 152 = 76$. В частности, эта сумма не может превосходить 176.

Пример, приведённый в предыдущем пункте, показывает, что сумма рейтингов может равняться 176. Значит, наибольшее значение суммы рейтингов всех футболистов — это 176.

Ответ: а) 29; б) да; в) 176.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>4</i>

С этим заданием справилось 6,3% всех обучающихся, причем по баллам получили соответственно:

Задание С6	0 баллов	1 балл	2 балла	3 балла	4 балла
Кол-во обучающихся (в %)	93,7	5,66	0,36	0,2	0,08

Основные ошибки были в следующем:

- недостаточное обоснование выводов,
- ошибочные рассуждения, связанные с неполным пониманием условий задачи.

Пример 37:

Каждый четвертый выпускник на ответы к заданиям б) и в) писал аналогично следующему:

б) Нет не могла уменьшиться, т.к. общий рейтинг постоянен, т.е. если рейтинг одного увеличивается, то другого уменьшается.

в) 100 — это наибольшее значение, которое может принимать сумма рейтингов, т.к. она выражена в процентах.

В. Т.п. рейтинг — это процентная доля, то наибольшее значение она может принять равно 100, но учитывая, что числа округляются, так например 0,5 округлится до 1, и так можно сделать 200 раз.

Пример 38:

Пример рассуждений, основанный на подобных умозаключениях:

в) Наибольшее значение сумма рейтингов может принимать 100%, т.к. $\frac{x}{n} + \frac{y}{n} + \frac{z}{n} = 1$, то есть 100%, где x, y, z — кол-во человек проголосовавших за одного футболиста, а n — общее число проголосовавших, то есть $x + y + z = n$.
К примеру возьмем за $x=1, y=2, z=3$, то $n=6$ и

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 1, \text{ то есть } 100\%. \text{ и так для всех}$$

аналогичных ситуаций. Да и сколько всего футболистов представлено для голосования, столько дробей и будет складываться. В числителе всегда будет кол-во человек проголосовавших за одного футболиста. А в знаменателе число всего проголосовавших. И сумма таких дробей всегда равна 1 или 100%.

Пример 39:

с 6) а) Пусть x посетителей проголосовали за 1 футболиста, тогда

$$\frac{16}{100} = \frac{x}{31}$$

$$\bar{x} = \frac{16 \cdot 31}{100} = 4,96 \approx 5.$$

Пусть y - новый рейтинг 1 футболиста.

$$\frac{17}{100} = \frac{5}{y}$$

$$y = \frac{100 \cdot 5}{17} = 28 \frac{14}{17} \approx 29.$$

Ответ: 29.

б) Если дать голосов, отданных за 32 каждого из хотя бы 32 человек записывается на 0,5 и Васа голосует за другого футболиста, сумма рейтингов может увеличиться более чем на 32.

Ответ: Да, может.

в) Пусть все, кроме одного футболиста получили 0,5% голосов, тогда оставшийся футболист получит $100 - 0,5 \cdot 151 = 24,5\%$ голосов.

Суммарный рейтинг будет равен $1 \cdot 151 + 25 = 176$.

Если хотя бы один из футболистов получит чуть меньшее кол-во голосов, его рейтинг будет округлен до меньшего числа, а значит суммарный рейтинг будет ниже.

Ответ: 176.

Оценка: 2 балла. В задании а) приведены здравые рассуждения и получен верный ответ. Большинство выпускников, решивших это задание, проводили расчеты именно такого плана. В в) верно приведен нужный пример.

Пример 40:

с 6. а) найдет, сколько человек проголосовало за первого футболиста.

$$0,305 \leq \frac{x}{16} \leq 0,315 \quad (\text{т.к. именно этот промежуток округляется до } 0,31)$$

$$4,88 \leq x \leq 5,04 \Rightarrow x = 5. - 5 человек проголосовало за первого футболиста.$$

после голосования Васи, его рейтинг стал равен:

$$\frac{5}{17} = 0,294, \text{ значит } - 29.$$

$$б) \frac{5}{16} + \left(\frac{1}{16}\right) \cdot 11 \geq 0,32 + \frac{5}{14} + \left(\frac{1}{14}\right) \cdot 12$$

$$0,31 + 0,06 \cdot 11 \geq 0,32 + 0,29 + 0,07 \cdot 12$$

$$0,97 \geq 1,33 - \text{противоречие.}$$

$$\frac{5}{16} + \frac{4}{16} + \frac{4}{16} + \frac{3}{16} \geq 0,52 + \frac{5}{12} + \frac{5}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12}$$

$$0,31 + 0,25 + 0,25 + 0,19 \geq 0,52 + 0,29 + 0,29 + 0,24 + 0,16.$$

$$1 \geq 1,32 - \text{противоречие.}$$

Не может

в) за первого футболиста было отдано 5 голосов, значит 4 остальных футболиста не имеют быть больше, либо столько же голосов. только у одного, за которого голосовали Вася, может быть 5 голосов.

$$\text{так, у Вася рейтинг} = \frac{5}{17} + \left(\frac{1}{17}\right) \cdot 12 = 0,29 + 0,06 \cdot 12 = 0,29 + 0,72 = 1,01 \Rightarrow 101$$

Ответ: а) 29

б) нет

в) 101

Оценка: 1 балл. Это пример одной из работ, где для определения рейтинга явно учитывается способ его получения (округление). Но, к сожалению, верны рассуждения только для а).

Пример 41:

а) Т.к. $31\% \approx \frac{5}{16}$ (здесь менее $\frac{1}{3}$ от общего числа проголосовавших) то после голоса Васи за другого футболиста, у первого остается 5 голосов это составляет 2,94... процента от аудитории т.е. рейтинг 1го футболиста становится 29

Ответ: 29.

б) Представим ситуацию в которой у половины (76) футболистов рейтинг 1, при том что за каждого проголосовало 0,5%. а остальные голоса разделены между другой половиной, тогда если Вася проголосует за группу с большим рейтингом, количество проголосовавших за каждого футболиста из первой половины (с рейтингом 1) станет чуть менее 0,5, тогда их рейтинг становится равен 0. И суммарная потеря рейтинга составит более 32, но менее или равно 76.

в) Наибольшую сумму можно получить таким образом: если на каждого футболиста придется по 0,5% общего количества голосов тогда мы получим 152 суммарных балла рейтинга. Однако $152 \cdot 0,5 = 76$ (~~2152~~) (< 100) и оставшиеся $100 - 76 = 24\%$ голосов распределить по 1% на 1 футболиста (всего 24 футболиста) тогда мы получим это у 128 процентов проголосовавших - 0,5 и рейтинг 1, а у 24 процентов проголосовавших - 1,5 и рейтинг 2. Тогда суммарный рейтинг. $152 + 24 = 176$

Оценка: 2 балла.

Пример 42:

С6) а) $0,31 \cdot 16 \approx 5$, 5 человек отдали свой голос за I футболиста. После того как Вася проголосует за другого футболиста рейтинг первого станет $\frac{5}{17} \approx 29\%$.

б) Да, если проголосовавших за него было не более 3, если они проголосовали за 2 или 3 разных футболистов (таблица 1 и 2), или не более 2, если они проголосовали за одного футболиста (таблица 3)

Таблица 1.

I - 33	I - 25
II - 33	II - 25
III - 33	III - 25
IV - 0	IV - 25
V - 0	V - 0
было	стало

Таблица 2

I - 67 67	I - 50
II - 33	II - 25
III - 0	III - 25
IV - 0	IV - 0
было	стало

Таблица 3

I - 100	I - 67
II - 0	II - 33
III - 0	III - 0
IV - 0	IV - 0
было	стало

в) Если между 152 футболистами поровну распределить голоса (рейтинги), то каждому футболисту достанется $\frac{100}{152} \approx 0,7\%$, что равно 1 рейтингу. Таким образом, максимальная сумма рейтинга может быть равна 152.

Оценка: 1 балл. Верно только а).

5. Общие выводы и рекомендации

Подводя итоги участия выпускников 2014 года Кемеровской области в ЕГЭ по математике можно констатировать:

1. 97,8% участников ЕГЭ справились с экзаменом по математике.

2. Результаты ЕГЭ 2014 г. показали, что 65,8% участников экзамена овладевают всеми контролируемыми элементами содержания на базовом уровне. 30,9% участников ЕГЭ демонстрируют высокий уровень подготовки, позволяющий обеспечить успешность обучения в вузе на специальностях с повышенными требованиями по математике. Очень высокий уровень подготовки показали 0,09% (10 человек), из них двое получили наивысшую оценку.

3. Средний балл ЕГЭ по математике выпускников сельских образовательных организаций не отличается от средних баллов выпускников городских общеобразовательных организаций. Высокий уровень подготовки выпускниками из сел не продемонстрирован, причем наивысшие баллы за экзамен получили представителями лицеев – МБОУ «Лицей №57» г. Прокопьевска и МБНОУ «Лицей №84 им. В.А. Власова» г. Новокузнецка.

4. Выпускники общеобразовательных организаций демонстрируют неплохие результаты выполнения заданий по содержательным блокам «Практико-ориентированные задачи», «Алгебра». Однако большая часть выпускников испытывает затруднения при решении задач из блока «Начала математического анализа». Отмечаемые из года в год одни и те же проблемы свидетельствуют о недостаточном внимании, уделяемом формированию умения исследования функции, нахождения производных и их приложениям.

5. У наиболее подготовленных выпускников этого года (кто брался решать и решал задания части С) задания по геометрии (С2 и С4) вызвали большие затруднения, чем задачи по алгебре и анализу (С1 и С3). Одна из причин этого – «смягчение» критериев для проверки алгебраических заданий, другая – во введении в геометрические задания пункта на доказательство некоторого факта.

6. Большое количество ошибок допускается при применении стандартных формул и методов преобразования выражений, решения уравнений, неравенств; низок уровень вычислительной культуры учащихся.

7. Экзаменуемые с трудом справляются с заданиями, в которых необходимо применить хорошо известный им алгоритм в чуть изменившейся ситуации. Самые низкие результаты были показаны при решении задач, которые труднее всего поддаются алгоритмизации: задачи по геометрии и задачи «прикладного» содержания.

На совещании по совершенствованию ЕГЭ по математике в 2015 году, которое состоялось 29 июля 2014 года, Федеральный институт педагогических измерений (ФИПИ), занимающийся разработкой заданий ЕГЭ, предложил разделить экзамен по математике на **базовый** и **профильный уровни**. Данное предложение было активно поддержано участниками совещания. По их мнению, такое нововведение позволило бы выпускникам, желающим учиться в профильных вузах, в полной мере продемонстрировать необходимый уровень знаний для поступления, а остальным участникам — проявить свои знания на широком спектре заданий базового уровня. Был предложен некоторый **примерный вариант** таких двухуровневых заданий: <http://4ege.ru/trening-matematika/5564-2-probnika-po-matematike-bazovyy-i-profilnyy-urovni.html>.

Помимо этого, на совещании было озвучено предложение о расширении открытого банка заданий по математике базового уровня. Чтобы создать условия для качественной подготовки к экзамену банк типовых заданий будет регулярно обновляться и дополняться. Работы по обновлению данного ресурса начнутся в октябре 2014 года и продолжатся до марта 2015 года. **Все нововведения**, касающиеся содержания ЕГЭ в 2015 году, **будут опубликованы до начала учебного года** и предложены для обсуждения с экспертным сообществом.

В целях совершенствования преподавания математики и достижения высокого уровня подготовки выпускников на государственной итоговой аттестации по предмету можно высказать некоторые рекомендации.

1. Провести семинары учителей математики с участием экспертов предметной комиссии по математике для дальнейшего использования их опыта при подготовке школьников к сдаче экзамена по математике.

2. Учителям необходимо своевременно знакомиться и работать с документами по ЕГЭ. Нужную информацию можно найти на сайтах: www.ege.edu.ru, www.fipi.ru.

3. При подготовке к ЕГЭ необходимо донести до выпускников информацию о наличии открытого банка заданий по математике www.mathege.ru, главная задача которого — дать представление о том, какие задания будут в вариантах единого государственного экзамена по математике в 2015 году и помочь выпускникам сориентироваться при подготовке к экзамену. Использовать демоверсию варианта 2015 года (должна появиться на сайтах www.ege.edu.ru, www.fipi.ru, www.alexlarin.net).

4. Необходимо обратить самое серьезное внимание на изучение геометрии, начиная с 7 класса, в котором начинается систематическое изучение этого предмета. Причем речь идет не о «натаскивании» на решение конкретных задач, предлагавшихся в различных вариантах ЕГЭ, а именно о серьезном систематическом изучении предмета.

5. Для успешного выполнения заданий части С необходим дифференцированный подход в работе с наиболее подготовленными учащимися. Это относится и к работе на уроке, и к дифференциации домашних заданий и заданий, предлагающихся учащимся на контрольных, проверочных, диагностических работах.

6. Подготовить даже очень сильных учащихся к выполнению последних заданий части С в условиях базовой школы не представляется возможным. Для этого необходима серьезная факультативная внеурочная работа под руководством подготовленных преподавателей (как в виде очных занятий, так и через сеть интернет-курсов).

7. Необходимо повысить процент необычных и творческих заданий в образовательном процессе, требующих от обучающихся нестандартного алгоритма действий, где надо применять полученные знания в изменённых и новых ситуациях. Содействовать участию школьников в математических олимпиадах разного уровня.

8. В процессе обучения следует особенное внимание уделять формированию умений выделять в условии задания главное, устанавливать причинно-следственные связи между отдельными элементами содержания. Необходимо добиваться понимания обучающимися того, что успешное выполнение любого задания предполагает тщательный анализ его условия и выбор верной последовательности действий.

9. Полезно время от времени проходить пробное тестирование, оно всегда доступно в Интернете, например: <http://www.resolventa.ru/demo/training.htm>. Также имеется большое число сайтов с полезной для подготовки к ЕГЭ литературой и вариантами заданий, например, : <http://www.mathege.ru>, <http://www.alleng.ru>, <http://www.alexlarin.net>.